

C^∞ -ОБОЛОЧКИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБР

С.С.Акбаров

13 марта 2013 г.

§ 0 Введение

В теории C^* -алгебр описывается конструкция, ставящая в соответствие каждой инволютивной банаховой алгебре A “ближайшую к ней снаружи” C^* -алгебру A^* , называемую *обертывающей C^* -алгеброй* алгебры A [7]. На категорном языке этот объект удобно представить как гомоморфизм (всюду под гомоморфизмом инволютивных топологических алгебр мы понимаем непрерывное, инволютивное, линейное, мультипликативное и сохраняющее единицу отображение) $\sigma : A \rightarrow A^*$ в некую C^* -алгебру A^* , обладающий тем свойством, что для любого другого гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ в произвольную C^* -алгебру B найдется единственный гомоморфизм C^* -алгебр $\varphi^* : A^* \rightarrow B$, замыкающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & A^* \\ & \searrow \varphi & \swarrow \varphi^* \\ & B & \end{array}$$

Как пример, обертывающей C^* -алгеброй для коммутативной инволютивной банаховой алгебры A является алгебра $C(T)$ непрерывных функций на спектре $T = \text{Spec}(A)$ алгебры A :

$$A^* = C(T). \quad (0.1)$$

Если алгебра A топологическая (мы всюду предполагаем, что топологические алгебры наделены раздельно непрерывным умножением), но не банахова, то для сохранения этого результата необходимо обобщить понятие обертывающей C^* -алгебры (при этом термин меняется, превращаясь в C^* -оболочку). Средствами функционального анализа этот объект можно определить как проективный предел фактор-алгебр алгебры A , являющихся C^* -алгебрами (см. [13], [14], [20], [15]), а на языке теории категорий он определяется в два этапа следующим образом (см. [3]).

Сначала вводится понятие C^* -расширения алгебры A . Под ним понимается плотный гомоморфизм $\sigma : A \rightarrow A'$ (то есть гомоморфизм, образ $\sigma(A)$ которого плотен в A') инволютивных алгебр такой, что для любого гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$ в произвольную C^* -алгебру B найдется единственный гомоморфизм C^* -алгебр $\varphi' : A' \rightarrow B$, замыкающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & A' \\ & \searrow \varphi & \swarrow \varphi' \\ & B & \end{array}$$

После этого C^* -оболочка инволютивной алгебры A определяется как C^* -расширение $\rho : A \rightarrow A^*$ такое, что для любого C^* -расширения $\sigma : A \rightarrow A'$ найдется единственный гомоморфизм инволютивных алгебр $v : A' \rightarrow A^*$, замыкающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \rho \\ A' & \xrightarrow{\quad v \quad} & A^* \end{array}$$

Для банаховых инволютивных алгебр понятие C^* -оболочки совпадает с понятием обертывающей C^* -алгебры, а формула (0.1) при таком обобщении сохраняет силу в классе инволютивных стереотипных алгебр с паракомпактным локально компактным спектром [3].

Если задаться целью объяснять интуитивный смысл операции взятия C^* -оболочки, то естественной точкой зрения для этого будет взгляд из популярной ныне области математики, называемой некоммутативной геометрией [6]. Пользуясь философией этой дисциплины, можно представлять C^* -оболочку как функтор из функционального анализа (под этим мы понимаем функтор из категории инволютивных топологических алгебр) в “некоммутативную топологию” (то есть в категорию неформально понимаемых “функциональных алгебр некоммутативных топологических пространств”). Этот функтор был использован в недавней работе Ю.Н.Кузнецовой [15] для построения теории двойственности (необязательно коммутативных) локально компактных групп.

Похожим функтором в математике является оболочка Аренса-Майкла $A \mapsto A^\heartsuit$ (см. [19], [2]), действующая из функционального анализа в “некоммутативный комплексный анализ” (в категорию неформально понимаемых “функциональных алгебр некоммутативных комплексных многообразий”). Эта конструкция, в свою очередь, была использована автором в [2] для построения теории двойственности (необязательно коммутативных) комплексных групп Ли. Аналогом формулы (0.1) в этой теории является формула

А. Ю. Пирсковского [19], связывающая алгебру $\mathcal{P}(M)$ многочленов на комплексном аффинном алгебраическом многообразии M с алгеброй $\mathcal{O}(M)$ голоморфных функций на M :

$$\mathcal{P}(M)^\vee = \mathcal{O}(M).$$

Наличие естественных функторов из функционального анализа в топологию и в комплексный анализ рождает подозрение, что должен существовать такой же функтор со значениями в дифференциальной геометрии, который можно было бы назвать C^∞ -оболочкой топологической алгебры. В настоящей работе мы предлагаем конструкцию такого функтора. Наше определение C^∞ -оболочки аналогично данному выше категориному определению C^* -оболочки с той разницей, что в определении C^∞ -расширения мы заменяем C^* -алгебру B на алгебру $B[[m]]$ степенных рядов с коэффициентами в C^* -алгебре B , а от гомоморфизма φ требуем, чтобы его коэффициенты в разложении по степеням переменных в $B[[m]]$ были дифференциальными операторами подходящего порядка (см. ниже определения на страницах 45 и 44). Основным результатом работы является доказательство равенства, аналогичного формуле (0.1): мы приводим достаточные условия для того, чтобы C^∞ -оболочкой подалгебры A (мы обозначаем ее $\text{Env}_\infty A$) в алгебре $C^\infty(M)$ гладких функций на гладком многообразии M являлась алгебра $C^\infty(M)$:

$$\text{Env}_\infty A = C^\infty(M).$$

Автор надеется использовать описанные в этой статье конструкции для построения теории двойственности в дифференциальной геометрии по аналогии с упомянутыми теориями двойственности в топологии [15] и в комплексном анализе [2].

(а) Терминология, обозначения и предварительные результаты.

В тексте мы часто употребляем термины *стереотипное пространство* и *стереотипная алгебра*. Мы отсылаем читателя к работе автора [1], где эти понятия определены и подробно обсуждаются (см. также [2] и [3]). Под *топологической алгеброй* мы понимаем топологическое векторное пространство, снабженное раздельно непрерывным ассоциативным умножением с единицей.

Инволюция на стереотипном пространстве. Пусть X – векторное пространство над полем \mathbb{C} . *Инволюцией* на X мы называем произвольное отображение $x \in X \mapsto x^* \in X$, удовлетворяющее тождествам

$$(x^*)^* = x, \quad (x + y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda \cdot x)^* = \bar{\lambda} \cdot x^*, \quad x, y \in \mathbb{C}T_s[A], \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (0.2)$$

Вектор $x \in X$ называется *вещественным*, если он совпадает со своей инволюцией:

$$x^* = x. \quad (0.3)$$

При заданной инволюции $x \mapsto x^*$ для всякого вектора $x \in X$ определены его *вещественная* и *мнимая* части:

$$\text{Re } x = \frac{x + x^*}{2}, \quad \text{Im } x = \frac{x - x^*}{2i}. \quad (0.4)$$

Свойства $\text{Re } x$ и $\text{Im } x$:

1°. Вектор $x \in X$ вещественен тогда и только тогда, когда он совпадает со своей вещественной частью, или, что равносильно, когда у него мнимая часть нулевая:

$$x^* = x \iff \text{Re } x = x \iff \text{Im } x = 0. \quad (0.5)$$

2°. Для всякого $x \in X$ векторы $\text{Re } x$ и $\text{Im } x$ вещественны и удовлетворяют равенству

$$x = \text{Re } x + i \cdot \text{Im } x. \quad (0.6)$$

Наоборот, если для некоторых вещественных векторов $a, b \in X$ выполняется равенство

$$x = a + i \cdot b, \quad (0.7)$$

то $a = \text{Re } x$ и $b = \text{Im } x$.

3°. Для всякого $x \in X$ справедливы равенства

$$x^* = \operatorname{Re} x - i \cdot \operatorname{Im} x, \quad (0.8)$$

$$\operatorname{Re}(i \cdot x) = -\operatorname{Im} x \quad (0.9)$$

$$\operatorname{Im}(i \cdot x) = \operatorname{Re} x. \quad (0.10)$$

4°. Отображения $\operatorname{Re} : X \rightarrow X$ линейны над \mathbb{R} , удовлетворяют равенствам

$$\operatorname{Re}^2 = \operatorname{Re}, \quad \operatorname{Re} \circ \operatorname{Im} = \operatorname{Im}, \quad \operatorname{Im} \circ \operatorname{Re} = 0, \quad \operatorname{Im}^2 = 0,$$

и имеют образом \mathbb{R} -подпространство вещественных векторов в X :

$$\operatorname{Re} X = \operatorname{Im} X = \{x \in X : x^* = x\} = \{x \in X : \operatorname{Re} x = x\} = \{x \in X : \operatorname{Im} x = x\}. \quad (0.11)$$

- Равенство (0.6) называется *разложением на вещественную и мнимую части* вектора x .
- \mathbb{R} -подпространство (0.11) вещественных векторов в X называется *вещественной частью* пространства X .

Доказательство. 1. Первое свойство доказывается двумя цепочками равносильностей:

$$x^* = x \iff \frac{x + x^*}{2} = x \iff \operatorname{Re} x = x.$$

$$x^* = x \iff \frac{x - x^*}{2i} = 0 \iff \operatorname{Im} x = 0.$$

2. Вещественность $\operatorname{Re} x$ и $\operatorname{Im} x$ проверяется прямым вычислением, а формула (0.6) подстановкой. Пусть a и b вещественны и выполняется (0.7). Тогда

$$x^* = a^* + \bar{i} \cdot b^* = a - i \cdot b$$

Поэтому

$$\operatorname{Re} x = \frac{x + x^*}{2} = \frac{(a + i \cdot b) + (a - i \cdot b)^*}{2} = a, \quad \operatorname{Im} x = \frac{x - x^*}{2i} = \frac{(a + i \cdot b) - (a - i \cdot b)^*}{2i} = b.$$

3. Формула (0.8) следует из вещественности $\operatorname{Re} x$ и $\operatorname{Im} x$:

$$x^* = (\operatorname{Re} x + i \cdot \operatorname{Im} x)^* = (\operatorname{Re} x)^* + \bar{i} \cdot (\operatorname{Im} x)^* = \operatorname{Re} x - i \cdot \operatorname{Im} x,$$

а (0.9) и (0.10) из уже доказанного свойства 2°:

$$\operatorname{Re}(i \cdot x) = \operatorname{Re}(i \cdot \operatorname{Re} x + i^2 \cdot \operatorname{Im} x) = -\operatorname{Im} x,$$

$$\operatorname{Im}(i \cdot x) = \operatorname{Im}(i \cdot \operatorname{Re} x + i^2 \cdot \operatorname{Im} x) = \operatorname{Re} x.$$

4. Докажем равенство $\operatorname{Re} X = \operatorname{Im} X$. Во-первых,

$$x \in \operatorname{Re} X \iff \exists y \in X : x = \operatorname{Re} y \iff \operatorname{Re} x = \operatorname{Re}(\operatorname{Re} y) = \operatorname{Re} y = x \iff x^* = x.$$

И, во-вторых,

$$x \in \operatorname{Im} X \iff \exists y \in X : x = \operatorname{Im} y \iff \operatorname{Re} x = \operatorname{Re}(\operatorname{Im} y) = \operatorname{Im} y = x \iff x^* = x.$$

□

- Если X – стереотипное пространство, то *инволюцией* на X мы называем всякую инволюцию $x \mapsto x^*$ на X , как на вектором пространстве, подчиненную дополнительному условию непрерывности. В этом случае на сопряженном стереотипном пространстве X^* также задается инволюция по формуле

$$f^*(x) = \overline{f(x^*)}, \quad f \in X^*.$$

Предложение 0.1. *Операторы*

$$P(f) = f|_{\operatorname{Re} X}, \quad Q(g)(x) = g(\operatorname{Re} x) + i \cdot g(\operatorname{Im} x), \quad f \in \operatorname{Re}(X_{\mathbb{C}}^*), \quad g \in (\operatorname{Re} X)_{\mathbb{R}}^*, \quad (0.12)$$

являются взаимно обратными изоморфизмами между вещественной частью X^* и сопряженным пространством над полем \mathbb{R} к вещественной части X :

$$\operatorname{Re}(X_{\mathbb{C}}^*) \cong (\operatorname{Re} X)_{\mathbb{R}}^* \quad (0.13)$$

Доказательство. 1. Убедимся, сначала, что для всякого $g \in \operatorname{Re}(X_{\mathbb{C}}^*)$ отображение $Q(g) : X \rightarrow \mathbb{C}$ является линейным над \mathbb{C} функционалом. Аддитивность его очевидна, потому что g , Re и Im являются аддитивными отображениями:

$$Q(g)(x + y) = Q(g)(x) + Q(g)(y), \quad x, y \in X_{\mathbb{C}}^*. \quad (0.14)$$

По тем же причинам оно однородно над \mathbb{R} :

$$Q(g)(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot Q(g)(x), \quad x \in X_{\mathbb{C}}^*, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (0.15)$$

Заметим теперь дополнительно, что

$$\begin{aligned} Q(g)(i \cdot x) &= g(\operatorname{Re}(i \cdot x)) + i \cdot g(\operatorname{Im}(i \cdot x)) = (0.9), (0.10) = \\ &= g(-\operatorname{Im} x) + i \cdot g(\operatorname{Re} x) = i \cdot (i \cdot g(\operatorname{Im} x) + g(\operatorname{Re} x)) = i \cdot Q(g)(x) \end{aligned}$$

Вместе с (0.14) и (0.15) это дает однородность $Q(g)$ над \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} Q(g)(\lambda \cdot x) &= Q(g)(\operatorname{Re} \lambda \cdot x + i \cdot \operatorname{Im} \lambda \cdot x) = Q(g)(\operatorname{Re} \lambda \cdot x) + Q(g)(i \cdot \operatorname{Im} \lambda \cdot x) = \\ &= Q(g)(\operatorname{Re} \lambda \cdot x) + i \cdot Q(g)(\operatorname{Im} \lambda \cdot x) = \operatorname{Re} \lambda \cdot Q(g)(x) + i \cdot \operatorname{Im} \lambda \cdot Q(g)(x) = \\ &= (\operatorname{Re} \lambda + i \cdot \operatorname{Im} \lambda) \cdot Q(g)(x) = \lambda \cdot Q(g)(x). \end{aligned}$$

2. Покажем далее, что для всякого $g \in \operatorname{Re}(X_{\mathbb{C}}^*)$ отображение $Q(g) : X \rightarrow \mathbb{C}$ является вещественным функционалом в $X_{\mathbb{C}}^*$. Действительно,

$$\begin{aligned} Q(g)^*(x) &= \overline{Q(g)(x^*)} = \overline{g(\operatorname{Re} x^*) + i \cdot g(\operatorname{Im} x^*)} = \overline{g(\operatorname{Re} x) + i \cdot g(-\operatorname{Im} x)} = \\ &= \overline{g(\operatorname{Re} x) - i \cdot g(\operatorname{Im} x)} = g(\operatorname{Re} x) + i \cdot g(\operatorname{Im} x) = Q(g)(x). \end{aligned}$$

3. Мы видим, что Q отображает $(\operatorname{Re} X)_{\mathbb{R}}^*$ в $\operatorname{Re}(X_{\mathbb{C}}^*)$. Покажем теперь, что это отображение линейно над \mathbb{R} . Для любых $g, h \in (\operatorname{Re} X)_{\mathbb{R}}^*$

$$Q(g+h)(x) = (g+h)(\operatorname{Re} x) + i \cdot (g+h)(\operatorname{Im} x) = (g(\operatorname{Re} x) + i \cdot g(\operatorname{Im} x)) + (h(\operatorname{Re} x) + i \cdot h(\operatorname{Im} x)) = Q(g)(x) + Q(h)(x).$$

и для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$Q(\lambda \cdot g)(x) = (\lambda \cdot g)(\operatorname{Re} x) + i \cdot (\lambda \cdot g)(\operatorname{Im} x) = \lambda \cdot (g(\operatorname{Re} x) + i \cdot g(\operatorname{Im} x)) = \lambda \cdot Q(g)(x).$$

4. Итак, Q является линейным оператором из $(\operatorname{Re} X)_{\mathbb{R}}^*$ в $\operatorname{Re}(X_{\mathbb{C}}^*)$. Что касается P , то он очевидно является линейным оператором из $\operatorname{Re}(X_{\mathbb{C}}^*)$ в $(\operatorname{Re} X)_{\mathbb{R}}^*$. Непрерывность этих операторов следует из непрерывности операций $*$, Re и Im . Нам остается проверить, что они взаимно обратны. Во-первых, для любых $f \in \operatorname{Re}(X_{\mathbb{C}}^*)$ и $x \in X$ мы получим

$$Q(P(f))(x) = P(f)(\operatorname{Re} x) + i \cdot P(f)(\operatorname{Im} x) = f(\operatorname{Re} x) + i \cdot f(\operatorname{Im} x) = f(\operatorname{Re} x + i \cdot \operatorname{Im} x) = f(x).$$

И, во-вторых, для любых $g \in (\operatorname{Re} X)_{\mathbb{R}}^*$ и $x \in \operatorname{Re} X$

$$P(Q(g))(x) = Q(g)(x) = g(\operatorname{Re} x) + i \cdot g(\operatorname{Im} x) = g(x) + i \cdot g(0) = g(x).$$

□

Обозначение $M \cdot N$. Пусть X – левый стереотипный модуль над стереотипной алгеброй A . Если M – подпространство в A и N – подпространство в X , то мы обозначаем

$$M \cdot N = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i \cdot n_i; \ m_i \in M, n_i \in N, k \in \mathbb{N} \right\} \quad (0.16)$$

Для любых $L, M, N \subseteq A$

$$(L \cdot M) \cdot N = L \cdot (M \cdot N) \quad (0.17)$$

Для любых $M, N \subseteq A$

$$\overline{M \cdot N} = \overline{\overline{M} \cdot N} = \overline{M \cdot \overline{N}} = \overline{\overline{M} \cdot \overline{N}}$$

Лемма 0.1. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ – морфизм стереотипных алгебр. Тогда

(i) для любых подмножеств $M, N \subseteq A$ выполняется включение

$$\varphi(\overline{M \cdot N}) \subseteq \overline{\varphi(M) \cdot \varphi(N)}$$

(ii) для всякого левого (правого) идеала I в A множество $\overline{\varphi(I)}$ есть левый (правый) идеал в $\overline{\varphi(A)}$.

Доказательство. Часть (i) отмечалась в [1, Лемма 13.10], поэтому остается доказать (ii). Пусть $b \in \overline{\varphi(A)}$ и $y \in \varphi(I)$. Тогда

$$b \xleftarrow{\infty \leftarrow i} \varphi(a_i), \quad y \xleftarrow{\infty \leftarrow j} \varphi(x_j),$$

для некоторых направленностей $a_i \in A$ и $x_j \in I$. Отсюда

$$b \cdot y \xleftarrow{\infty \leftarrow i} \varphi(a_i) \cdot y \xleftarrow{\infty \leftarrow j} \varphi(a_i) \cdot \varphi(x_j) = \varphi(a_i \cdot x_j).$$

и поэтому $b \cdot y \in \overline{\varphi(I)}$. □

Инволютивный спектр.

- *Инволютивным спектром* $\text{Spec}(A)$ инволютивной стереотипной алгебры A над \mathbb{C} мы называем множество ее *инволютивных характеров*, то есть гомоморфизмов $s : A \rightarrow \mathbb{C}$ (непрерывных, инволютивных и сохраняющих единицу). Это множество мы наделяем топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в A .

Лемма 0.2. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ – инволютивный гомоморфизм стереотипных алгебр, причем A коммутативна, B – C^* -алгебра и $\varphi(A)$ плотно в B . Тогда

(i) для всякой точки $t \in \text{Spec}(B)$ выполняется равенство

$$\overline{\varphi(\text{Ker}(t \circ \varphi))} = \text{Ker } t \quad (0.18)$$

(ii) для всякой точки $s \in \text{Spec}(A) \setminus (\text{Spec}(B) \circ \varphi)$ выполняется равенство

$$\overline{\varphi(\text{Ker } s)} = B \quad (0.19)$$

Доказательство. 1. Пусть $t \in \text{Spec}(B)$. Прежде всего,

$$a \in \text{Ker}(t \circ \varphi) \implies t(\varphi(a)) = (t \circ \varphi)(a) = 0 \implies \varphi(a) \in \text{Ker } t.$$

Отсюда $\varphi(\text{Ker}(t \circ \varphi)) \subseteq \text{Ker } t$, и поэтому $\overline{\varphi(\text{Ker}(t \circ \varphi))} \subseteq \text{Ker } t$.

Пусть наоборот, $b \in \text{Ker } t$. Поскольку $\varphi(A)$ плотно в B , для всякого $\varepsilon > 0$ можно подобрать элемент $a_\varepsilon \in A$ такой, что

$$\|b - \varphi(a_\varepsilon)\| < \varepsilon.$$

Положим

$$a'_\varepsilon = a_\varepsilon - t(\varphi(a_\varepsilon)) \cdot 1_A.$$

Тогда, во-первых,

$$t(\varphi(a'_\varepsilon)) = t(\varphi(a_\varepsilon)) - t(\varphi(a_\varepsilon)) \cdot t(\varphi(1_A)) = 0.$$

То есть $a'_\varepsilon \in \text{Ker}(t \circ \varphi)$. А, во-вторых,

$$\|\varphi(a_\varepsilon) - \varphi(a'_\varepsilon)\| = \|\varphi(a_\varepsilon) - \varphi(a_\varepsilon) + t(\varphi(a_\varepsilon)) \cdot \varphi(1_A)\| = |t(\varphi(a_\varepsilon))| = \left| \underbrace{t(b) - t(\varphi(a_\varepsilon))}_0 \right| \leq \|t\| \cdot \|b - \varphi(a_\varepsilon)\| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\|b - \varphi(a'_\varepsilon)\| \leq \|b - \varphi(a_\varepsilon)\| + \|\varphi(a_\varepsilon) - \varphi(a'_\varepsilon)\| < 2\varepsilon.$$

Мы получили, что для любых $b \in \text{Ker } t$ и $\varepsilon > 0$ найдется элемент $a'_\varepsilon \in \text{Ker}(t \circ \varphi)$ такой, что $\|b - \varphi(a'_\varepsilon)\| < 2\varepsilon$. Это доказывает включение $\overline{\varphi(\text{Ker}(t \circ \varphi))} \supseteq \text{Ker } t$.

2. Зафиксируем $s \in \text{Spec}(A) \setminus (\text{Spec}(B) \circ \varphi)$. Для всякой точки $t \in \text{Spec}(B)$ найдется элемент $x_t \in A$, отделяющий s от $t \circ \varphi$:

$$s(x) \neq t(\varphi(x_t)).$$

Как следствие, элемент $a_t = x_t - s(x) \cdot 1_A$ должен обладать свойством

$$s(a_t) = s(x_t) - s(x_t) \cdot s(1_A) = s(x_t) - s(x_t) = 0 \quad (0.20)$$

и свойством

$$t(\varphi(a_t)) = t(\varphi(x_t)) - s(x_t) \cdot t(\varphi(1_A)) = t(\varphi(x_t)) - s(x_t) \neq 0. \quad (0.21)$$

Из (0.21) следует, что множества

$$U_t = \{r \in \text{Spec}(A) : r(a_t) \neq 0\}$$

покрывают компакт $\text{Spec}(B) \circ \varphi$. Значит, среди них имеется конечное подпокрытие U_{t_1}, \dots, U_{t_n} :

$$\bigcup_{i=1}^n U_{t_i} \supseteq \text{Spec}(B) \circ \varphi.$$

Положим

$$a = \sum_{i=1}^n a_{t_i} \cdot a_{t_i}^*.$$

Этот элемент в точке s равен нулю, потому что в силу (0.20), все a_{t_i} в ней равны нулю,

$$s(a) = \sum_{i=1}^n s(a_{t_i}) \cdot \overline{s(a_{t_i})} = 0.$$

Как следствие, $a \in \text{Ker } s$, и значит,

$$\varphi(a) \in \overline{\varphi(\text{Ker } s)}.$$

А, с другой стороны, элемент $\varphi(a)$ отличен от нуля всюду на $\text{Spec}(B)$, потому что на каждой точке $t \in \text{Spec}(B)$ какой-нибудь элемент $\varphi(a_{t_i})$ отличен от нуля:

$$t(\varphi(a)) = \sum_{i=1}^n t(\varphi(a_{t_i})) \cdot \overline{t(\varphi(a_{t_i}))} = \sum_{i=1}^n |t(\varphi(a_{t_i}))|^2 > 0.$$

То есть $\varphi(a)$ отличен от нуля всюду на спектре $\text{Spec}(B)$ коммутативной C^* -алгебры $B \cong C(\text{Spec}(B))$, и как следствие, он обратим в B :

$$b \cdot \varphi(a) = 1_B$$

для некоторого $b \in B$. Поскольку здесь $\varphi(a)$ лежит в левом идеале $\overline{\varphi(\text{Ker } s)}$ алгебры $B = \overline{\varphi(A)}$ (по лемме 0.1(ii)), мы получаем, что 1_B тоже лежит в $\overline{\varphi(\text{Ker } s)}$. Поэтому

$$\overline{\varphi(\text{Ker } s)} \supseteq B \cdot \overline{\varphi(\text{Ker } s)} \supseteq B \cdot 1_B = B.$$

□

Следствие 0.1. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ – инволютивный гомоморфизм стереотипных алгебр, причем A коммутативна, а B – C^* -алгебра. Тогда для всякой точки $s \in \text{Spec}(A) \setminus (\text{Spec}(\overline{\varphi(A)}) \circ \varphi)$ выполняется равенство

$$\overline{\varphi(\text{Ker } s)} \cdot B = B \quad (0.22)$$

Доказательство. По лемме 0.2(ii), множество $\overline{\varphi(\text{Ker } s)}$ содержит единицу алгебры $\overline{\varphi(A)}$, которая совпадает с единицей алгебры B :

$$\overline{\varphi(\text{Ker } s)} \ni 1_B.$$

Поэтому

$$\overline{\varphi(\text{Ker } s)} \cdot B \supseteq \overline{\varphi(\text{Ker } s)} \cdot B \supseteq 1_B \cdot B = B.$$

□

§ 1 Локально выпуклые расслоения и дифференциально-геометрические конструкции

Нам понадобятся некоторые факты из теории расслоений топологических векторных пространств. В этом изложении мы следуем идеологии монографии М. Ж. Дюпре и Р. М. Жилетта [11].

Нам будет удобно сразу ввести следующее определение.

- *Расслоением векторных пространств* над полем \mathbb{C} мы будем называть семерку $(\Xi, M, \pi, \cdot, +, \{0_t; t \in M\}, -)$, в которой
 - 1) Ξ – множество, называемое *пространством расслоения*,
 - 2) M – множество, называемое *базой расслоения*,
 - 3) $\pi : \Xi \rightarrow M$ – их сюръективное отображение, называемое *проекцией расслоения*,
 - 4) $\cdot : \mathbb{C} \times \Xi \rightarrow \Xi$ – отображение, называемое *послойным умножением на скаляры*,
 - 5) $+: \Xi \sqcap_M \Xi \rightarrow \Xi$ – отображение, называемое *послойным сложением*¹
 - 6) $\{0_t; t \in M\}$ – семейство элементов пространства Ξ , называемых *нулями*.
 - 7) $- : \Xi \rightarrow \Xi$ – отображение, называемое *послойным обращением*,

причем для каждой точки $t \in M$ операции $\cdot, +, -$ с элементом 0_t задают на прообразе $\Xi_t := \pi^{-1}(t) \subseteq \Xi$ (называемом *слоем над точкой t*) структуру векторного пространства с нулем 0_t .

- *Сечением* векторного расслоения $(\Xi, M, \pi, \cdot, +, \{0_t; t \in M\}, -)$ мы называем произвольное отображение $x : M \rightarrow \Xi$ такое, что

$$\pi \circ x = \text{id}_M.$$

- *Подрасслоением* векторного расслоения $(\Xi, M, \pi, \cdot, +, \{0_t; t \in M\}, -)$ мы называем всякое подмножество Ψ в Ξ пересечение которого с каждым слоем $\pi^{-1}(t)$ образует в нем (непустое) векторное подпространство. Понятно, что Ψ будет расслоением над той же базой относительно тех же структурных элементов.

(а) Локально выпуклые расслоения

- Пусть расслоение векторных пространств $(\Xi, M, \pi, \cdot, +, \{0_t; t \in M\}, -)$ над \mathbb{C} наделено следующей дополнительной структурой:
 - 1) пространство расслоения Ξ и база расслоения M наделены топологиями, относительно которых проекция $\pi : \Xi \rightarrow M$ является (не только сюръективным, но и) непрерывным и открытым отображением,
 - 2) задано множество \mathcal{P} функций $p : \Xi \rightarrow \mathbb{R}_+$, называемых *полунормами*,

причем выполняются следующие условия:

- (а) на каждом слое $\pi^{-1}(t)$ ограничения $p|_{\pi^{-1}(t)} : \Xi_t \rightarrow \mathbb{R}_+$ функций $p \in \mathcal{P}$ представляют собой систему полунорм, определяющих структуру (отделимого) локально выпуклого пространства на $\pi^{-1}(t)$, топология которого совпадает с индуцированной из Ξ ,
- (б) отображение послойного умножения на скаляры $\mathbb{C} \times \Xi \rightarrow \Xi$ непрерывно:

$$\left(\lambda_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \lambda, \quad \xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi \right) \implies \lambda_i \cdot \xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \lambda \cdot \xi.$$

- (с) отображение послойного сложения² $\Xi \sqcap_M \Xi \rightarrow \Xi$ непрерывно:

$$\left(\xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi, \quad \zeta_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \zeta, \quad \pi(\xi_i) = \pi(\zeta_i), \quad \pi(\xi) = \pi(\zeta) \right) \implies \xi_i + \zeta_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi + \zeta.$$

¹Здесь под $\Xi \sqcap_M \Xi$ понимается расслоенное произведение Ξ на себя над M , то есть подмножество декартова произведения $\Xi \times \Xi$, состоящее из пар (ξ, ζ) таких, что $\pi(\xi) = \pi(\zeta)$.

²Здесь под $\Xi \sqcap_M \Xi$ понимается расслоенное произведение Ξ на себя над M , то есть подмножество декартова произведения $\Xi \times \Xi$, состоящее из пар (ξ, ζ) таких, что $\pi(\xi) = \pi(\zeta)$.

- (d) всякая полунорма $p \in \mathcal{P}$ представляет собой полунепрерывное сверху отображение $p : \Xi \rightarrow \mathbb{R}_+$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ множество точек $\{\xi \in \Xi : p(\xi) < \varepsilon\}$ открыто, или, что то же самое,

$$\left(\xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi, \quad p(\xi) < \varepsilon \right) \implies \underbrace{p(\xi_i) < \varepsilon}_{\text{для почти всех } i},$$

- (e) для любой точки $t \in M$ и всякой окрестности V точки 0_t в Ξ найдутся полунорма $p \in \mathcal{P}$, число $\varepsilon > 0$ и открытое множество U в M , содержащее t , такие, что

$$\{\xi \in \pi^{-1}(U) : p(\xi) < \varepsilon\} \subseteq V.$$

иными словами, выполняется импликация

$$\left(\pi(\xi_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} t \quad \& \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad p(\xi_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \right) \implies \xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0_t.$$

Тогда систему $(\Xi, M, \pi, \cdot, +, \{0_t; t \in M\}, -)$ с описанными топологиями на M и Ξ и системой полунорм \mathcal{P} мы называем *расслоением локально выпуклых пространств*.

Замечание 1.1. Условие (b) в этом списке можно заменить на формально более слабое условие, что для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ отображение умножения $\xi \mapsto \lambda \cdot \xi$ непрерывно из Ξ в Ξ :

$$\xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi \implies \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \lambda \cdot \xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \lambda \cdot \xi.$$

Действительно, при выполнении этого условия из $\lambda_i \rightarrow \lambda$ и $\xi_i \rightarrow \xi$ будет следовать с одной стороны,

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad p(\lambda_i \cdot \xi_i - \lambda \cdot \xi_i) \leq |\lambda_i - \lambda| \cdot p(\xi_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

а с другой,

$$\pi(\xi_i) \rightarrow \pi(\xi) \implies \pi(\lambda_i \cdot \xi_i - \lambda \cdot \xi_i) = \pi(\xi_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \pi(\xi)$$

Вместе в силу (e) это дает

$$\lambda_i \cdot \xi_i - \lambda \cdot \xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0_{\pi(\xi)},$$

а это в свою очередь в силу (c) дает

$$\lambda_i \cdot \xi_i = \underbrace{\lambda_i \cdot \xi_i - \lambda \cdot \xi_i}_{\downarrow 0_{\pi(\xi)}} + \underbrace{\lambda \cdot \xi_i}_{\downarrow \lambda \cdot \xi} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0_{\pi(\xi)} + \lambda \cdot \xi = \lambda \cdot \xi.$$

Замечание 1.2. Из условий (b) и (c) следует, что в (c) можно заменить послойное сложение послойным вычитанием:

$$\left(\xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi, \quad \zeta_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \zeta, \quad \pi(\xi_i) = \pi(\zeta_i), \quad \pi(\xi) = \pi(\zeta) \right) \implies \xi_i - \zeta_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi - \zeta. \quad (1.1)$$

Предложение 1.1. В локально выпуклом расслоении (Ξ, M, π) соотношение

$$\xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi$$

эквивалентно следующим условиям:

$$(i) \quad \pi(\xi_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \pi(\xi),$$

- (ii) для всякой полунормы $p \in \mathcal{P}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует направленность $\zeta_i \in \Xi$ и элемент $\zeta \in \Xi$ такие, что

$$\zeta_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \zeta \quad \underbrace{\pi(\zeta_i) = \pi(\xi_i)}_{\text{для почти всех } i}, \quad \pi(\zeta) = \pi(\xi), \quad p(\zeta - \xi) < \varepsilon, \quad \underbrace{p(\zeta_i - \xi_i) < \varepsilon}_{\text{для почти всех } i}. \quad (1.2)$$

Доказательство. Понятно, что здесь нужно доказать достаточность. Пусть выполнены (i) и (ii). Зафиксируем $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$ и подберем направленность ζ_i , описанную в (ii). Пусть V – произвольная окрестность точки ξ в Ξ . Поскольку отображение π открыто, образ $\pi(V)$ множества V должен быть окрестностью точки $\pi(\xi)$ в M . Поэтому из условия $\pi(\xi_i) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{M} \pi(\xi)$ следует, что почти все точки $\pi(\xi_i)$ лежат в $\pi(V)$.

$$\exists i_V : \quad \forall i \geq i_V \quad \pi(\xi_i) \in \pi(V).$$

Значит, существуют точки $\{\zeta_i^V; i \geq i_V\}$ такие, что

$$\zeta_i^V \in V, \quad \pi(\zeta_i^V) = \pi(\xi_i).$$

Мы получили двойную направленность $\{\zeta_i^V; V \in \mathcal{U}(\xi), i \geq i_V\}$, в которой верхний индекс V пробегает систему $\mathcal{U}(\xi)$ всех окрестностей точки ξ в Ξ , упорядоченную по включению в сторону сужения, со следующими свойствами:

$$\pi(\xi_i) = \pi(\zeta_i^V), \quad \zeta_i^V \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\Xi} \xi \\ V \rightarrow \{\xi\}$$

Вместе с условиями $\pi(\zeta) = \pi(\xi)$, $\pi(\zeta_i) = \pi(\xi_i)$ (для почти всех i) и $\zeta_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\Xi} \zeta$ из (1.2) это в силу (1.1) дает соотношение

$$\zeta_i - \zeta_i^V \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\Xi} \zeta - \xi \\ V \rightarrow \{\xi\}$$

Оно, в свою очередь, вместе с неравенством $p(\zeta - \xi) < \varepsilon$ из (1.2), в силу (d), дает неравенство

$$p(\zeta_i - \zeta_i^V) < \varepsilon.$$

(верное для почти всех i), из которого затем выводится неравенство

$$p(\xi_i - \zeta_i^V) = p(\xi_i - \zeta_i + \zeta_i - \zeta_i^V) \leq \overbrace{p(\xi_i - \zeta_i) + p(\zeta_i - \zeta_i^V)}^{\varepsilon \vee_{(1,2)}} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

(также верное для почти всех i). Добавив к нему очевидное соотношение

$$\pi(\xi_i - \zeta_i^V) = \pi(\xi_i) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{M} \pi(\xi) \\ V \rightarrow \{\xi\}$$

мы, в силу (e) получим:

$$\xi_i - \zeta_i^V \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\Xi} 0_{\pi(\xi)} \\ V \rightarrow \{\xi\}$$

Теперь, применяя (c), мы получаем:

$$\xi_i = \underbrace{\xi_i - \zeta_i^V}_{\downarrow 0_{\pi(\xi)}} + \underbrace{\zeta_i^V}_{\downarrow \xi} \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\Xi} 0_{\pi(\xi)} + \xi = \xi. \\ V \rightarrow \{\xi\}$$

□

Непрерывные сечения локально выпуклого расслоения.

- *Непрерывным сечением локально выпуклого расслоения $\pi : \Xi \rightarrow M$ называется всякое непрерывное отображение $x : M \rightarrow \Xi$ такое, что*

$$\pi \circ x = \text{id}_M.$$

Множество всех непрерывных сечений обозначается $\text{Sec}(\pi)$ и наделяется структурой левого $C(M)$ -модуля и топологией равномерной сходимости на компактах в M .

Свойства непрерывных сечений:

1°. Пространство $\text{Sec}(\pi)$ непрерывных сечений всякого локально выпуклого расслоения $\pi : \Xi \rightarrow M$ над произвольным паракомпактным локально компактным пространством M является локально выпуклым $C(M)$ -модулем относительно послойного умножения

$$(a \cdot x)(t) = a(t) \cdot x(t), \quad a \in C(M), \quad x \in \text{Sec}(\pi)$$

и полунорм

$$p_T(x) = \sup_{t \in T} p(x(t)), \quad p \in \mathcal{P}.$$

где T – всевозможные компакты в M .

2°. Пусть M – паракомпактное локально компактное пространство, $\pi : \Xi \rightarrow M$ – локально выпуклое расслоение, и X – $C(M)$ -подмодуль в $C(M)$ -модуле непрерывных сечений π ,

$$X \subseteq \text{Sec}(\pi)$$

плотный в каждом слое:

$$\forall t \in M \quad \overline{\{x(t), x \in X\}} = \pi^{-1}(t). \quad (1.3)$$

Тогда X плотен в $\text{Sec}(\pi)$:

$$\overline{X} = \text{Sec}(\pi).$$

Доказательство. 1. Если $x \in \text{Sec}(\pi)$ и $a \in C(M)$, то послойное произведение $a \cdot x$ будет непрерывным сечением из-за свойства (b):

$$t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} t \implies \left(a(t_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} a(t), \quad x(t_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x(t) \right) \implies a(t_i) \cdot x(t_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} a(t) \cdot x(t).$$

Если T – компакт в M , то для всякого непрерывного сечения $x \in \text{Sec}(\pi)$ образ $x(T)$ является компактным пространством в Ξ . Как следствие, образ $p(x(T))$ при непрерывном отображении $p \in \mathcal{P}$ из Ξ в \mathbb{R} с топологией, порожденной базой открытых множеств вида $(-\infty, \varepsilon)$, тоже должен быть компактным подмножеством в \mathbb{R} . Поэтому каждое его покрытие множествами вида $(-\infty, \varepsilon)$ содержит конечное подпокрытие, и это означает, что $p(x(T))$ ограничено в \mathbb{R} в обычном смысле. То есть конечна величина

$$p_T(x) = \sup_{t \in T} p(x(t)).$$

Она, очевидно, будет полунормой на $\text{Sec}(\pi)$, и из цепочки

$$p_T(a \cdot x) = \sup_{t \in T} p(a(t) \cdot x(t)) \leq \sup_{t \in T} \left(|a(t)| \cdot p(x(t)) \right) \leq \sup_{t \in T} |a(t)| \cdot \sup_{t \in T} p(x(t))$$

следует, что такие полунормы превращают $\text{Sec}(\pi)$ в локально выпуклый $C(M)$ -модуль (с совместно непрерывным умножением).

2. Пусть $y \in \text{Sec}(\pi)$ и $\varepsilon > 0$. Из (1.3) следует, что для любой полунормы $p \in \mathcal{P}$ и всякой точки $t \in M$ существует непрерывное сечение $x_t \in \text{Sec}(\pi)$ со свойством

$$p(x_t(t) - y(t)) < \varepsilon.$$

Из того, что полунорма p полунепрерывна сверху (а отображения x_t и y непрерывны), следует, что множество

$$U_t = \{s \in M : p(x_t(s) - y(s)) < \varepsilon\}$$

открыто, и поэтому является окрестностью точки t . Как следствие, семейство $\{U_t; t \in M\}$ является открытым покрытием пространства M .

Зафиксируем теперь какой-нибудь компакт $T \subseteq M$. Его покрытие $\{U_t; t \in T\}$ содержит некоторое конечное подпокрытие $\{U_{t_1}, \dots, U_{t_n}\}$. Подберем подчиненное ему разбиение единицы

$$0 \leq a_i \leq 1, \quad \text{supp } a_i \subseteq U_{t_i}, \quad \sum_{i=1}^n a_i(t) = 1 \quad (t \in T)$$

и положим

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_{t_i}$$

(поскольку $\text{Sec}(\pi)$ есть $C(M)$ -модуль, $x \in \text{Sec}(\pi)$). Тогда

$$\begin{aligned} p_T(x - y) &= \sup_{t \in T} p(x(t) - y(t)) = \sup_{t \in T} p\left(\sum_{i=1}^n a_i(t) \cdot x_{t_i}(t) - \sum_{i=1}^n a_i(t) \cdot y(t)\right) = \\ &= \sup_{t \in T} p\left(\sum_{i=1}^n a_i(t) \cdot (x_{t_i}(t) - y(t))\right) \leq \sup_{t \in T} \sum_{i=1}^n a_i(t) \cdot p((x_{t_i}(t) - y(t))) < \sup_{t \in T} \sum_{i=1}^n a_i(t) \cdot \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Задание локально выпуклого расслоения системами сечений и полунорм.

Предложение 1.2. Пусть даны

- 1) расслоение векторных пространств $(\Xi, M, \pi, \cdot, +, \{0_t; t \in M\}, -)$ над \mathbb{C} ,
- 2) векторное пространство X его сечений,
- 3) система \mathcal{P} функций на Ξ ,
- 4) топология на базе M ,

причем выполняются следующие условия:

- (i) на каждом слое ограничения $p|_{\pi^{-1}(t)}$ функций $p \in \mathcal{P}$ образуют систему полунорм, превращающую $\pi^{-1}(t)$ в (отделимое) локально выпуклое пространство;
- (ii) система \mathcal{P} направлена по возрастанию: для любых двух функций $p, q \in \mathcal{P}$ найдется функция $r \in \mathcal{P}$, мажорирующая p и q :

$$p(v) \leq r(v), \quad q(v) \leq r(v), \quad v \in \Xi \quad (1.4)$$

- (iii) для любого сечения $x \in X$ и любой полунормы $p \in \mathcal{P}$ функция $t \in M \mapsto p(x(t))$ полунепрерывна сверху на M ,
- (iv) для всякой точки $t \in M$ множество $\{x(t); x \in X\}$ плотно в локально выпуклом пространстве $\pi^{-1}(t)$.

Тогда существует единственная топология на Ξ , необходимая для того, чтобы система $(\Xi, M, \pi, \cdot, +, \{0_t; t \in M\}, -)$ с заданной топологией на M и системой полунорм \mathcal{P} превратилась в расслоение локально выпуклых пространств, множество непрерывных сечений которого содержит X :

$$X \subseteq \text{Sec}(\pi).$$

При этом базу такой топологии в Ξ образуют множества вида

$$W(x, U, p, \varepsilon) = \{\xi \in \Xi : \pi(\xi) \in U \text{ \& } p(\xi - x(\pi(\xi))) < \varepsilon\}, \quad (1.5)$$

где $x \in X$, $p \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$ и U – открытое множество в M .

Доказательство. 1. Покажем сначала, что множества (1.5) действительно образуют базу некоторой топологии в Ξ . Прежде всего, они покрывают Ξ , потому что если $\xi \in \Xi$, то из условия (iii) следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $p \in \mathcal{P}$ найдется $x \in X$ такой что

$$p(\xi - x(\pi(\xi))) < \varepsilon,$$

и если теперь выбрать какую-нибудь открытую окрестность U точки $\pi(\xi)$, то точка ξ будет лежать в множестве $W(x, U, p, \varepsilon)$.

Проверим далее вторую аксиому базы: рассмотрим точку ξ , какие-нибудь ее базисные окрестности $W(x, U, p, \varepsilon)$ и $W(y, V, q, \delta)$,

$$\xi \in W(x, U, p, \varepsilon) \cap W(y, V, q, \delta), \quad (1.6)$$

и покажем, что существует ее базисная окрестность $W(z, O, r, \sigma)$ такая, что

$$\xi \in W(z, O, r, \sigma) \subseteq W(x, U, p, \varepsilon) \cap W(y, V, q, \delta). \quad (1.7)$$

Включение (1.6) означает выполнение условий

$$\pi(\xi) \in U, \quad p(\xi - x(\pi(\xi))) < \varepsilon, \quad \pi(\xi) \in V, \quad q(\xi - y(\pi(\xi))) < \delta. \quad (1.8)$$

Рассмотрим слой $\pi^{-1}(\pi(\xi))$. Условия

$$p(\xi - x(\pi(\xi))) < \varepsilon, \quad q(\xi - y(\pi(\xi))) < \delta \quad (1.9)$$

можно понимать так, что точка ξ лежит в пересечении окрестностей точек $x(\pi(\xi))$ и $y(\pi(\xi))$, определяемых полунормами p и q с радиусами ε и δ . Поэтому (здесь мы используем (ii)) существует некая полунорма $r \in \mathcal{P}$ и число $\sigma > 0$ такие, что r -окрестность точки ξ радиуса 2σ содержится в описанных p - и q -окрестностях:

$$\forall \zeta \in \pi^{-1}(\pi(\xi)) \quad r(\zeta - \xi) < 2\sigma \implies \left(p(\zeta - x(\pi(\xi))) < \varepsilon \quad \& \quad q(\zeta - y(\pi(\xi))) < \delta \right). \quad (1.10)$$

Немного уменьшим σ , если это необходимо, так, чтобы условия (1.9) можно было заменить на

$$p(\xi - x(\pi(\xi))) < \varepsilon - 2\sigma, \quad q(\xi - y(\pi(\xi))) < \delta - 2\sigma. \quad (1.11)$$

Воспользуемся затем условием (iv) и выберем сечение $z \in X$ так, чтобы

$$r(z(\pi(\xi)) - \xi) < \sigma. \quad (1.12)$$

Тогда мы получим цепочку импликаций

$$\begin{aligned} r(\zeta - z(\pi(\xi))) < \sigma &\implies r(\zeta - \xi) \leq r(\zeta - z(\pi(\xi))) + r(z(\pi(\xi)) - \xi) < \sigma + \sigma = 2\sigma \implies \\ &\stackrel{(1.10)}{\implies} \left(p(\zeta - x(\pi(\xi))) < \varepsilon \quad \& \quad q(\zeta - y(\pi(\xi))) < \delta \right). \end{aligned}$$

Иными словами, в слое $\pi^{-1}(\pi(\xi))$ r -окрестность радиуса σ точки $z(\pi(\xi))$ также содержится в описанных p - и q -окрестностях:

$$\forall \zeta \in \pi^{-1}(\pi(\xi)) \quad r(\zeta - z(\pi(\xi))) < \sigma \implies \left(p(\zeta - x(\pi(\xi))) < \varepsilon \quad \& \quad q(\zeta - y(\pi(\xi))) < \delta \right). \quad (1.13)$$

Заметим, что в силу условия (ii), можно считать, что полунорма r мажорирует полунормы p и q , то есть выполняется (1.4). Примем это и рассмотрим множество

$$O = \{s \in U \cap V : p(z(s) - x(s)) < \varepsilon - \sigma \quad \& \quad q(z(s) - y(s)) < \delta - \sigma\}. \quad (1.14)$$

В силу (iii) оно открыто в M . Кроме того, оно содержит точку $\pi(\xi)$, потому что, во-первых, $\pi(\xi) \in U \cap V$ в силу (1.8), во-вторых,

$$\begin{aligned} p(z(\pi(\xi)) - x(\pi(\xi))) &\leq \underbrace{p(z(\pi(\xi)) - \xi)}_{\substack{\wedge \quad (1.4) \\ r(z(\pi(\xi)) - \xi) \\ \wedge \quad (1.12) \\ \sigma}} + \underbrace{p(\xi - x(\pi(\xi)))}_{\wedge \quad (1.11)} < \varepsilon - \sigma, \end{aligned}$$

и, в-третьих,

$$\begin{aligned} p(z(\pi(\xi)) - y(\pi(\xi))) &\leq \underbrace{p(z(\pi(\xi)) - \xi)}_{\substack{\wedge \quad (1.4) \\ r(z(\pi(\xi)) - \xi) \\ \wedge \quad (1.12) \\ \sigma}} + \underbrace{p(\xi - y(\pi(\xi)))}_{\wedge \quad (1.11)} < \delta - \sigma. \end{aligned}$$

Включение $\pi(\xi) \in O$ вместе с условием (1.12) означают

$$\xi \in W(z, O, r, \sigma). \quad (1.15)$$

Далее, для всякой точки $\zeta \in \Xi$ мы получим

$$\begin{aligned} \pi(\zeta) \in O \quad \& \quad r(\zeta - z(\pi(\zeta))) < \sigma \implies p(\zeta - x(\pi(\zeta))) &\leq \underbrace{p(\zeta - z(\pi(\zeta)))}_{\substack{\wedge \quad (1.4) \\ r(\zeta - z(\pi(\zeta))) \\ \wedge \\ \sigma}} + \underbrace{p(z(\pi(\zeta)) - x(\pi(\zeta)))}_{\wedge \quad (1.14)} < \varepsilon \end{aligned}$$

и поэтому

$$W(z, O, r, \sigma) \subseteq W(x, U, p, \varepsilon).$$

Аналогично,

$$W(z, O, r, \sigma) \subseteq W(y, V, q, \delta).$$

Вместе с (1.15) это дает (1.7).

2. Итак, мы поняли, что множества (1.5) образуют базу некоторой топологии на Ξ . Заметим теперь, что относительно этой топологии отображение $\pi : \Xi \rightarrow M$ непрерывно и открыто. Пусть

$$\xi_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\Xi} \xi.$$

Рассмотрим произвольную окрестность U точки $\pi(\xi)$. Выберем какую-нибудь полунорму $p \in \mathcal{P}$, и, пользуясь условием (iv), подберем сечение $x \in X$ так, чтобы $p(\xi - x(\pi(\xi))) < 1$. Тогда множество $W(x, U, p, 1)$ будет окрестностью точки ξ , поэтому $\xi \in W(x, U, p, 1)$ для почти всех i , а отсюда следует, что $\pi(\xi_i) \in U$ для почти всех i . Это доказывает соотношение

$$\pi(\xi_i) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{M} \pi(\xi),$$

то есть непрерывность π .

Теперь рассмотрим произвольную базисную окрестность $W(x, U, p, \varepsilon)$. При проекции π она отображается в открытое множество U , причем сюръективно, потому что у каждой точки $t \in U$ найдется прообраз $x(t) \in W(x, U, p, \varepsilon)$.

3. Покажем далее, что относительно полученной топологии в Ξ всякое сечение $x \in X$ будет непрерывным отображением. Пусть

$$t_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{M} t.$$

Рассмотрим какую-нибудь базисную окрестность $W(y, U, p, \varepsilon)$ точки $x(t)$. Условие $x(t) \in W(y, U, p, \varepsilon)$ означает

$$t \in U, \quad p(x(t) - y(t)) < \varepsilon. \quad (1.16)$$

Положим

$$V = \{s \in U : p(x(s) - y(s)) < \varepsilon\}.$$

В силу условия (iii) это множество открыто в M . В силу (1.16) оно содержит точку t , то есть является окрестностью точки t . Поэтому для почти всех индексов i мы последовательно получаем

$$t_i \in V \implies p(x(t_i) - y(t_i)) < \varepsilon \implies x(t_i) \in W(y, V, p, \varepsilon) \subseteq W(y, U, p, \varepsilon).$$

Это доказывает соотношение

$$x(t_i) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\Xi} x(t), \quad (1.17)$$

то есть непрерывность x .

4. Теперь начнем проверять, что относительно заданной топологии на Ξ тройка (Ξ, M, π) становится расслоением локально выпуклых пространств. Проверим прежде всего непрерывность послойного умножения на скаляры. Пусть

$$\lambda_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\mathbb{C}} \lambda, \quad \xi_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\Xi} \xi$$

Рассмотрим сначала случай $\lambda \neq 0$. Выберем какую-нибудь окрестность $W(x, U, p, \varepsilon)$ точки $\lambda \cdot \xi$:

$$\pi(\lambda \cdot \xi) \in U, \quad p(\lambda \cdot \xi - x(\pi(\xi))) < \varepsilon.$$

Тогда

$$\pi(\xi) \in U, \quad p\left(\xi - \frac{1}{\lambda} \cdot x(\pi(\xi))\right) < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

то есть множество $W\left(\frac{1}{\lambda} \cdot x, U, p, \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$ является окрестностью для точки ξ , и поэтому $\xi_i \in W\left(\frac{1}{\lambda} \cdot x, U, p, \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right)$ для почти всех i :

$$\exists i_0 \quad \forall i \geq i_0 \quad \pi(\xi_i) \in U, \quad p\left(\xi_i - \frac{1}{\lambda} \cdot x(\pi(\xi_i))\right) < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}. \quad (1.18)$$

Теперь для почти всех i получаем

$$\begin{aligned}
p(\lambda_i \cdot \xi_i - x(\pi(\lambda_i \cdot \xi_i))) &= p(\lambda_i \cdot \xi_i - x(\pi(\xi_i))) = |\lambda_i| \cdot p\left(\xi_i - \frac{1}{\lambda_i} \cdot x(\pi(\xi_i))\right) \leq \\
&\leq |\lambda_i| \cdot p\left(\xi_i - \frac{1}{\lambda} \cdot x(\pi(\xi))\right) + |\lambda_i| \cdot p\left(\frac{1}{\lambda} \cdot x(\pi(\xi)) - \frac{1}{\lambda_i} \cdot x(\pi(\xi_i))\right) = \\
&= |\lambda_i| \cdot p\left(\xi_i - \frac{1}{\lambda} \cdot x(\pi(\xi))\right) + p\left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot x(\pi(\xi)) - x(\pi(\xi_i))\right) = \\
&= |\lambda_i| \cdot p\left(\xi_i - \frac{1}{\lambda} \cdot x(\pi(\xi))\right) + p\left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot x(\pi(\xi)) - x(\pi(\xi))\right) + p(x(\pi(\xi)) - x(\pi(\xi_i))) = \\
&= \underbrace{|\lambda_i|}_{\wedge \atop 2|\lambda|} \cdot \underbrace{p\left(\xi_i - \frac{1}{\lambda} \cdot x(\pi(\xi))\right)}_{\wedge \atop \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \quad (1.18)} + \underbrace{\left|\frac{\lambda_i}{\lambda} - 1\right|}_{\wedge \atop \varepsilon} \cdot \underbrace{p(x(\pi(\xi)))}_{\wedge \atop \varepsilon \quad (1.17)} + \underbrace{p(x(\pi(\xi)) - x(\pi(\xi_i)))}_{\wedge \atop \varepsilon \quad (1.17)} < 3\varepsilon + \varepsilon \cdot p(x(\pi(\xi)))
\end{aligned}$$

Добавляя к этому условие $\pi(\xi_i) \in U$ из (1.18), мы получаем

$$\lambda_i \cdot \xi_i \in W(x, U, p, 3\varepsilon + \varepsilon \cdot p(x(\pi(\xi))))$$

для почти всех i . Поскольку ε выбирался произвольным,

$$\lambda_i \cdot \xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \lambda \cdot \xi. \quad (1.19)$$

Теперь рассмотрим случай $\lambda = 0$. Выберем какую-нибудь окрестность $W(x, U, p, \varepsilon)$ точки $0_{\pi(\xi)}$:

$$\pi(\xi) \in U, \quad p(x(\pi(\xi))) < \varepsilon.$$

Подберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$p(x(\pi(\xi))) < \varepsilon - \delta.$$

Поскольку $\xi_i \rightarrow \xi$, для почти всех i выполняется

$$\pi(\xi_i) \in U, \quad p(x(\pi(\xi_i))) < \varepsilon - \delta.$$

Теперь если $p(\xi) \neq 0$, то для почти всех i

$$p(\lambda_i \cdot \xi_i - x(\pi(\xi_i))) \leq \underbrace{|\lambda_i|}_{\wedge \atop \frac{\delta}{2p(\xi)}} \cdot \underbrace{p(\xi_i)}_{\wedge \atop 2p(\xi)} + \underbrace{p(x(\pi(\xi_i)))}_{\wedge \atop \varepsilon - \delta} < \varepsilon.$$

Если же $p(\xi) = 0$, то из $\xi_i \rightarrow \xi$ следует $p(\xi_i) < 1$ для почти всех i , поэтому

$$p(\lambda_i \cdot \xi_i - x(\pi(\xi_i))) \leq \underbrace{|\lambda_i|}_{\wedge \atop \delta} \cdot \underbrace{p(\xi_i)}_{\wedge \atop 1} + \underbrace{p(x(\pi(\xi_i)))}_{\wedge \atop \varepsilon - \delta} < \varepsilon.$$

В любом случае для почти всех i получаем

$$\pi(\xi_i) \in U, \quad p(\lambda_i \cdot \xi_i - x(\pi(\xi_i))) < \varepsilon.$$

то есть $\lambda_i \cdot \xi_i \in W(x, U, p, \varepsilon)$. Это тоже означает (1.19).

5. Докажем непрерывность послойного сложения. Пусть

$$\xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi, \quad v_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} v, \quad \pi(\xi_i) = \pi(v_i), \quad \pi(\xi) = \pi(v)$$

Выберем какую-нибудь базисную окрестность $W(z, U, p, \varepsilon)$ точки $\xi + v$:

$$\pi(\xi + v) \in U, \quad p(\xi + v - z(\pi(\xi + v))) < \varepsilon.$$

Подберем число $\sigma > 0$ так, чтобы

$$p(\xi + v - z(\pi(\xi + v))) < \varepsilon - 2\sigma. \quad (1.20)$$

В слое $\pi^{-1}(\pi(\xi + v)) = \pi^{-1}(\pi(\xi)) = \pi^{-1}(\pi(v))$ операция сложения непрерывна, поэтому существуют базисные окрестности $W(x, V_x, q, \delta)$ и $W(y, V_y, r, \delta)$ точек ξ и v такие, что

$$\forall \xi' \in W(x, V_x, q, \delta) \cap \pi^{-1}(\pi(\xi)) \quad \forall v' \in W(y, V_y, r, \delta) \cap \pi^{-1}(\pi(v)) \quad \xi' + v' \in W(z, U, p, \varepsilon - 2\sigma).$$

То есть

$$\begin{aligned} \forall \xi', v' \in \pi^{-1}(\pi(\xi + v)) \quad q(\xi' - x(\pi(\xi))) < \delta \quad \& \quad r(v' - y(\pi(v))) < \delta \quad \implies \\ \implies \quad p(\xi' + v' - z(\pi(\xi + v))) < \varepsilon - 2\sigma. \end{aligned} \quad (1.21)$$

При этом из включений $\xi \in W(x, V_x, q, \delta)$ и $v \in W(y, V_y, r, \delta)$ следует во-первых, что

$$q(\xi - x(\pi(\xi))) < \delta \quad \& \quad r(v - y(\pi(v))) < \delta, \quad (1.22)$$

и во-вторых, что

$$\pi(\xi) \in V_x, \quad \pi(v) \in V_y,$$

то есть V_x и V_y являются окрестностями для $\pi(\xi)$ и $\pi(v)$ соответственно. Уменьшив, если необходимо, эти окрестности V_x и V_y , можно считать, что они совпадают и лежат в U :

$$V_x = V_y = V \subseteq U.$$

Кроме того, очевидно, можно выбрать полунормы q и r так, чтобы они мажорировали p (всюду на Ξ)

$$p \leq q, \quad p \leq r, \quad (1.23)$$

а число δ так, чтобы

$$\delta < \frac{\sigma}{2}. \quad (1.24)$$

Теперь рассмотрим множество

$$O = \{s \in V : p(x(s) + y(s) - z(s)) < \varepsilon - \sigma\}. \quad (1.25)$$

(оно открыто в M в силу условия (iii)).

Открытое множество $W(x, O, q, \delta)$ является окрестностью точки ξ , потому что, во-первых,

$$\begin{aligned} p(x(\pi(\xi)) + y(\underbrace{\pi(\xi)}_{\parallel \pi(v)}) - z(\underbrace{\pi(\xi)}_{\parallel \pi(\xi+v)})) &\leq \underbrace{p(x(\pi(\xi)) - \xi)}_{\substack{\wedge \text{ (1.23)} \\ q(x(\pi(\xi)) - \xi) \\ \wedge \text{ (1.22)} \\ \delta \\ \wedge \text{ (1.24)} \\ \frac{\sigma}{2}}} + \underbrace{p(y(\pi(v)) - v)}_{\substack{\wedge \text{ (1.23)} \\ r(x(\pi(v)) - v) \\ \wedge \text{ (1.22)} \\ \delta \\ \wedge \text{ (1.24)} \\ \frac{\sigma}{2}}} + \underbrace{p(\xi + v - z(\pi(\xi + v)))}_{\wedge \text{ (1.20)} \\ \varepsilon - 2\sigma} < \varepsilon - \sigma \end{aligned}$$

и значит, $\pi(\xi) \in O$. А, во-вторых, в силу (1.22), $q(\xi - x(\pi(\xi))) < \delta$.

Точно так же $v \in W(y, O, r, \delta)$.

Покажем теперь, что окрестности $W(x, O, q, \delta)$ и $W(y, O, r, \delta)$ точек ξ и v удовлетворяют условию

$$\forall \xi' \in W(x, O, q, \delta) \quad \forall v' \in W(y, O, r, \delta) \quad (\pi(\xi') = \pi(v') \implies \xi' + v' \in W(z, U, p, \varepsilon)). \quad (1.26)$$

Действительно, из $\xi' \in W(x, O, q, \delta)$, $v' \in W(y, O, r, \delta)$ и $\pi(\xi') = \pi(v')$ следует, во-первых, что

$$\pi(\xi') = \pi(v') \in O \subseteq V \subseteq U.$$

И, во-вторых,

$$\begin{aligned} p(\xi' + v' - z(\pi(\xi' + v'))) &\leq \underbrace{p(\xi' - x(\pi(\xi')))}_{\substack{\wedge \text{ (1.23)} \\ q(\xi' - x(\pi(\xi')))) \\ \wedge \\ \delta \\ \wedge \text{ (1.24)} \\ \frac{\sigma}{2}}} + \underbrace{p(v' - y(\pi(v')))}_{\substack{\wedge \text{ (1.23)} \\ r(v' - y(\pi(v')))) \\ \wedge \\ \delta \\ \wedge \text{ (1.24)} \\ \frac{\sigma}{2}}} + \underbrace{p(x(\xi') + y(v') - z(\pi(\xi' + v')))}_{\wedge \text{ (1.25)} \\ \varepsilon - \sigma} < \varepsilon \end{aligned}$$

Теперь мы получаем цепочку

$$\xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi, \quad v_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} v, \quad \pi(\xi_i) = \pi(v_i), \quad \pi(\xi) = \pi(v)$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \\
& \xi_i \in W(x, O, q, \delta), \quad v_i \in W(y, O, r, \delta) \quad \text{для почти всех } i \\
& \Downarrow \quad (1.26) \\
& \xi_i + v_i \in W(z, U, p, \varepsilon) \quad \text{для почти всех } i
\end{aligned}$$

Здесь $W(z, U, p, \varepsilon)$ выбиралась как произвольная базисная окрестность точки $\xi + v$. Поэтому

$$\xi_i + v_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\Xi} \xi + v.$$

6. Пусть p – произвольная полунорма из \mathcal{P} и $\varepsilon > 0$. Покажем, что множество $W = \{\xi \in \Xi : p(\xi) < \varepsilon\}$ открыто в Ξ . Зафиксируем какую-нибудь точку $\xi \in W$. Из условия $p(\xi) < \varepsilon$ следует, что найдется $\sigma > 0$ такое, что $p(\xi) < \varepsilon - 2\sigma$. В силу (iv), найдется $x \in X$ такой, что $p(\xi - x(\pi(\xi))) < \sigma$. Положим

$$O = \{t \in M : p(x(t)) < \varepsilon - \sigma\}.$$

Тогда базисная окрестность $W(x, O, p, \sigma)$ содержит точку ξ , потому что, во-первых,

$$p(x(\pi(\xi))) \leq \underbrace{p(x(\pi(\xi)) - \xi)}_{\wedge \atop \sigma} + \underbrace{p(\xi)}_{\wedge \atop \varepsilon - 2\sigma} < \varepsilon - \sigma \implies \pi(\xi) \in O,$$

и, во-вторых, в силу выбора x , выполняется $p(\xi - x(\pi(\xi))) < \sigma$. То есть $W(x, O, p, \sigma)$ – окрестность точки ξ .

С другой стороны, $W(x, O, p, \sigma)$ содержится в множестве W , потому что если $v \in W(x, O, p, \sigma)$, то

$$p(v) \leq \underbrace{p(v - x(\pi(v)))}_{\wedge \atop \sigma} + \underbrace{p(x(\pi(v)))}_{\wedge \atop \varepsilon - \sigma} < \varepsilon.$$

7. Покажем, что выполняется условие (е) на с.9: для любой точки $t \in M$ и всякой окрестности V точки 0_t в Ξ найдутся полунорма $p \in \mathcal{P}$, число $\sigma > 0$ и открытое множество O в M , содержащее t , такие, что

$$\{\xi \in \pi^{-1}(O) : p(\xi) < \sigma\} \subseteq V.$$

Поскольку топология в Ξ порождена окрестностями (1.5), существует некая базисная окрестность $W(x, U, p, \varepsilon)$ точки 0_t , содержащаяся в V :

$$0_t \in W(x, U, p, \varepsilon) \subseteq V.$$

Это значит выполнение двух условий:

$$t \in U \quad \& \quad p(0_t - x(t)) < \varepsilon.$$

Подберем $\sigma > 0$ так, чтобы

$$p(0_t - x(t)) < \varepsilon - \sigma$$

и положим

$$O = \{s \in U : p(x(s)) < \varepsilon - \sigma\}.$$

В силу условия (iii) это будет открытое множество в M . Оно содержит точку t , потому что

$$p(x(t)) \leq \underbrace{p(x(t) - 0_t)}_{\wedge \atop \varepsilon - \sigma} + \underbrace{p(0_t)}_{\parallel \atop 0} < \varepsilon - \sigma$$

Заметим, что если $\xi \in \pi^{-1}(O)$ и $p(\xi) < \sigma$, то

$$p(\xi - x(\pi(\xi))) \leq \underbrace{p(\xi)}_{\wedge \atop \sigma} + \underbrace{p(x(\pi(\xi)))}_{\wedge \atop \varepsilon - \sigma \quad (\pi(\xi) \in O)} < \varepsilon$$

Теперь мы получаем цепочку

$$\{\xi \in \pi^{-1}(O) : p(\xi) < \sigma\} \subseteq W(x, O, p, \varepsilon) \subseteq W(x, U, p, \varepsilon) \subseteq V.$$

8. Докажем единственность такой топологии. Она следует из того, что в ней сходимость направленности

$$\xi_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\Xi} \xi \quad (1.27)$$

однозначно определяется поведением π , \mathcal{P} и X на точках ξ_i и ξ , точнее, следующими двумя условиями:

$$(a) \pi(\xi_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \pi(\xi),$$

(b) для любого сечения $x \in X$, любой полунормы $p \in \mathcal{P}$ и любого $\varepsilon > 0$ условие

$$p(\xi_i - x(\pi(\xi_i))) < p(\xi - x(\pi(\xi))) + \varepsilon$$

выполняется для почти всех индексов i .

Действительно, если выполняется (1.27), то условие (a) будет просто следствием непрерывности отображения $\pi : \Xi \rightarrow M$. А условие (b) доказывается так: из $\xi_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \xi$ следует $x(\pi(\xi_i)) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x(\pi(\xi))$, и вместе, в силу полунепрерывности сверху полунормы p , это дает цепочку неравенств, справедливую для почти всех i :

$$p(\xi_i - x(\pi(\xi_i))) \leq \underbrace{p(\xi_i - \xi)}_{\substack{\wedge \\ \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{для почти всех } i}} + p(\xi - x(\pi(\xi))) + \underbrace{p(x(\pi(\xi)) - x(\pi(\xi_i)))}_{\substack{\wedge \\ \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{для почти всех } i}} < \frac{\varepsilon}{2} + p(\xi - x(\pi(\xi))) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Наоборот, пусть выполняются условия (a) и (b). Тогда по условию (iii), для любой полунормы $p \in \mathcal{P}$ и любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать сечение $x \in X$ такое, что

$$p(\xi - x(\pi(\xi))) < \varepsilon. \quad (1.28)$$

После этого, мы получим во-первых,

$$x(\pi(\xi_i)) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x(\pi(\xi))$$

(в силу условия (a) и непрерывности отображения x), во-вторых, для всех i

$$\pi(x(\pi(\xi))) = \pi(\xi), \quad \pi(x(\pi(\xi_i))) = \pi(\xi_i)$$

(потому что x – сечение для π), и, в-третьих, для почти всех i

$$p(\xi_i - x(\pi(\xi_i))) \leq \underbrace{p(\xi - x(\pi(\xi)))}_{\substack{\wedge \text{ (1.28)} \\ \varepsilon}} + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

(в силу условия (b)). Вместе все это означает, что точки $\zeta_i = x(\pi(\xi_i))$, $\zeta = x(\pi(\xi))$ удовлетворяют условию (1.2) (в котором ε заменено на 2ε), и поскольку $p \in \mathcal{P}$ и $\varepsilon > 0$ выбирались произвольными, по предложению 1.1 это влечет соотношение (1.27). \square

Морфизмы расслоений. Пусть даны два локально выпуклых расслоения $\pi : \Xi \rightarrow M$, $\rho : \Omega \rightarrow M$ и непрерывное отображение $\mu : \Xi \rightarrow \Omega$, замыкающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Xi & \xrightarrow{\mu} & \Omega \\ & \searrow \pi & \swarrow \rho \\ & M & \end{array} \quad (1.29)$$

Тогда для всякой точки $t \in M$ и любого $\xi \in \pi^{-1}(t)$ мы получим

$$\rho(\mu(\xi)) = \pi(\xi) = t,$$

и это означает, что отображение μ переводит слой $\pi^{-1}(t)$ в слой $\rho^{-1}(t)$:

$$\mu(\pi^{-1}(t)) \subseteq \rho^{-1}(t).$$

Условимся называть *морфизмом* локально выпуклого расслоения $\pi : \Xi \rightarrow M$ в локально выпуклое расслоение $\rho : \Omega \rightarrow M$ всякое непрерывное отображение $\mu : \Xi \rightarrow \Omega$, замыкающее диаграмму (1.29) и линейное на каждом слое, то есть такое, что для всякой точки $t \in M$ порожденное отображение слоев

$$\mu : \pi^{-1}(t) \rightarrow \rho^{-1}(t)$$

линейно (и непрерывно в силу непрерывности μ).

Двойственное расслоение. Всякому локально выпуклому расслоению $\pi : \Xi \rightarrow M$ над \mathbb{C} можно поставить в соответствие расслоение векторных пространств над \mathbb{C}

$$\pi^* : \Xi^* \rightarrow M \quad \Bigg| \quad \Xi^* = \bigsqcup_{t \in M} \pi^{-1}(t)^*, \quad \forall u \in \pi^{-1}(t)^* \quad \pi^*(u) = t.$$

Мы будем называть его *сопряженным расслоением векторных пространств* к расслоению $\pi : \Xi \rightarrow M$. Для всякого компакта $K \subset \Xi$ и любой точки $u \in \Xi^*$ положим

$$p_K(u) = \sup_{\xi \in K \cap \pi^{-1}(\pi^*(u))} |u(\xi)|.$$

Рассмотрим локально выпуклое расслоение, называемое *тривиальным* со слоем \mathbb{C} :

$$\pi_M : \mathbb{C} \times M \rightarrow M \quad \Bigg| \quad \pi_M(\lambda, t) = t, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad t \in M.$$

Обозначим символом $\pi_{\mathbb{C}}$ проекцию на первую компоненту:

$$\pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times M \rightarrow \mathbb{C} \quad \Bigg| \quad \pi_{\mathbb{C}}(\lambda, t) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad t \in M.$$

Слоем $\pi_M^{-1}(t)$ всякой точки $t \in M$ в этом расслоении является множество $\mathbb{C} \times \{t\}$, которое при отображении $\pi_{\mathbb{C}}$ отождествляется с полем \mathbb{C} . Как следствие, если $\mu : \Xi \rightarrow \mathbb{C} \times M$ – морфизм расслоений, то на каждом слое определена композиция

$$\pi^{-1}(t) \xrightarrow{\mu} \pi_M^{-1}(t) = \mathbb{C} \times \{t\} \xrightarrow{\pi_{\mathbb{C}}} \mathbb{C},$$

являющаяся линейным непрерывным функционалом на $\pi^{-1}(t)$. Мы можем сделать вывод, что формула

$$x(t) = \pi_{\mathbb{C}} \circ \mu \Big|_{\pi^{-1}(t)}, \quad t \in M, \quad (1.30)$$

определяет некое сечение $x : M \rightarrow \Xi^*$ сопряженного расслоения векторных пространств $\pi^* : \Xi^* \rightarrow M$. Обозначим через X множество всех таких сечений.

Рассмотрим теперь в каждом слое $\pi^{-1}(t)^*$ множество X_t функционалов u , представимых в виде $u = \pi_{\mathbb{C}} \circ \mu \Big|_{\pi^{-1}(t)}$ для некоторого морфизма расслоений $\mu : \Xi \rightarrow \mathbb{C} \times M$, и пусть $\overline{X_t}$ обозначает замыкание этого пространства в пространстве $\pi^{-1}(t)^*$ (относительно топологии, порожденной полунормами $\mathcal{P} = \{p_K; K \subseteq \Xi\}$).

Предложение 1.3. Если база M является хаусдорфовым пространством, то на подрасслоении

$$\pi_* : \Xi_* = \bigsqcup_{t \in M} \overline{X_t} \rightarrow M$$

множество сечений X и множество полунорм \mathcal{P} задают топологию, превращающую Ξ_* в расслоение локально выпуклых пространств в соответствии с предложением 1.2.

- Расслоение $\pi_* : \Xi_* \rightarrow M$ мы будем называть *двойственным расслоением* к расслоению $\pi : \Xi \rightarrow M$.

Доказательство. Здесь нужно просто проверить условия (i)-(iv) предложения 1.2.

1. Полунормы p_K на каждом слое $\pi^{-1}(t)^*$ задают локально выпуклую топологию, которая будет отделима, например потому что сильнее топологии поточечной сходимости, которая задается полунормами вида p_{ξ} , где ξ пробегает слой $\pi^{-1}(t)$.

2. Система \mathcal{P} направлена по возрастанию: любые две полунормы p_K и p_L мажорируются полунормой $p_{K \cup L}$.

3. Покажем, что для любого сечения $x \in X$ и любой полунормы p_K функция $t \in T \mapsto p_K(x(t))$ полунепрерывна снизу. Пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим множество $O = \{t \in M : p_K(x(t)) < \varepsilon\}$. Если оно пусто, то оно автоматически открыто, поэтому важно рассмотреть случай, когда оно непусто. Пусть $t_0 \in O$, то есть

$$p_K(x(t_0)) = \sup_{\xi \in K \cap \pi^{-1}(t_0)} |\pi_{\mathbb{C}}(\mu(\xi))| < \varepsilon$$

Рассмотрим множество $U = \{\xi \in \Xi : |\pi_{\mathbb{C}}(\mu(\xi))| < \varepsilon\}$. Оно открыто и содержит $K \cap \pi^{-1}(t_0)$:

$$K \cap \pi^{-1}(t_0) \subseteq U. \quad (1.31)$$

Наша задача показать, что существует окрестность V точки t_0 такая, что

$$K \cap \pi^{-1}(V) \subseteq U.$$

Предположим, что это не так. Тогда для всякой окрестности V точки t_0 найдется точка

$$\xi_V \in K \cap \pi^{-1}(V) \setminus U.$$

Поскольку направленность $\{\xi_V; V \rightarrow \{t_0\}\}$ лежит в компакте K , она в этом компакте должна иметь некоторую предельную точку $\xi \in K$ [8, Теорема 3.1.23]. Под действием проекции π направленность $\{\xi_V; V \rightarrow \{t_0\}\}$ превращается в направленность $\{\pi(\xi_V); V \rightarrow \{t_0\}\}$ с предельной точкой $\pi(\xi)$. При этом $\{\pi(\xi_V); V \rightarrow \{t_0\}\}$ сходится к t_0 . Поскольку пространство M хаусдорфово, предельная точка $\pi(\xi)$ должна совпадать с пределом t_0 . Мы получаем, что

$$\xi \in K \cap \pi^{-1}(t_0) \setminus U.$$

Это противоречит (1.31).

4. Для всякой точки $t \in M$ множество $\{x(t); x \in X\}$ плотно в пространстве $\overline{X_t}$ по определению самого $\overline{X_t}$. \square

(b) Расслоение значений и морфизмы модулей

Расслоение значений модуля над коммутативной инволютивной алгеброй. Пусть A – инволютивная стереотипная алгебра. Для всякой точки $t \in \text{Spec}(A)$ обозначим через I_t ядро t :

$$I_t = \{a \in A : t(a) = 0\}.$$

Пусть далее X – стереотипный модуль над A . В соответствии с (0.16), мы обозначаем символом $I_t \cdot X$ подмодуль в X , состоящий из всевозможных сумм элементов вида $a \cdot x$, где $a \in I_t$ и $x \in X$:

$$I_t \cdot X = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \cdot x_i; a_i \in I_t, x_i \in X, k \in \mathbb{N} \right\}$$

а $\overline{I_t \cdot X}$ – его замыкание. Положив

$$J_A^0 X = \bigsqcup_{t \in M} (X / \overline{I_t \cdot X})^\vee, \quad \pi_{A,X}^0(x + \overline{I_t \cdot X}) = t,$$

мы получим сюръекцию $\pi_{A,X}^0 : J_A^0 X \rightarrow \text{Spec}(A)$. Для всякого элемента $x \in X$ обозначим через $j^0(x)$ сечение сюръекции $\pi_{A,X}^0$, действующее по формуле

$$j^0(x)(t) = x + \overline{I_t \cdot X}, \quad t \in M.$$

Обозначим через $\mathcal{P}(X)$ множество всех непрерывных полунорм $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ локально выпуклого пространства X . Всякая полунорма $p \in \mathcal{P}(X)$ порождает полунорму p^0 на стереотипном фактор-пространстве $(X / \overline{I_t \cdot X})^\vee$ по формуле

$$p^0(x + \overline{I_t \cdot X}) := \inf_{y \in I_t \cdot X} p(x + y) = \inf_{y \in I_t \cdot X} p(x + y), \quad x \in X. \quad (1.32)$$

Тогда p^0 можно считать функцией на $J_A^0 X$, действие которой на каждом слое описывается формулой (1.32).

Обозначим далее через $\sigma : A \rightarrow \mathcal{C}(M)$ естественное отображение алгебры A в алгебру непрерывных функций на своем спектре $M = \text{Spec}(M)$:

$$\sigma(a)(t) = t(a), \quad a \in A, t \in M \quad (1.33)$$

и заметим тождество:

$$j^0(a \cdot x) = \sigma(a) \cdot j^0(x), \quad a \in A, x \in X. \quad (1.34)$$

Оно доказывается переносом в левую часть и подстановкой аргумента $t \in M$:

$$j^0(a \cdot x)(t) - (\sigma(a) \cdot j^0(x))(t) = \underbrace{a \cdot x + \overline{I_t \cdot X}}_{\parallel j^0(a \cdot x)(t)} - \underbrace{t(a)}_{\parallel \sigma(a)(t)} \cdot \underbrace{(x + \overline{I_t \cdot X})}_{\parallel j^0(x)(t)} \subseteq \underbrace{(a - t(a))}_{\cap I_t} \cdot x + \overline{I_t \cdot X} \subseteq \overline{I_t \cdot X}$$

Чтобы применить предложение 1.2 нам не хватает следующей леммы.

Лемма 1.1. Для всякого элемента $x \in X$ и любой непрерывной полунормы $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ отображение $t \in \text{Спец}(A) \mapsto p^0(j^0(x)(t)) \in \mathbb{R}_+$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Пусть $t \in \text{Спец}(A)$ и $\varepsilon > 0$. Условие

$$p^0(j^0(x)(t)) = p^0(x + \overline{I_t \cdot X}) = \inf_{y \in I_t \cdot X} p(x + y) = \inf_{y \in I_t \cdot X} p(x + y) < \varepsilon$$

означает, что для некоторого $y \in I_t \cdot X$ выполняется неравенство

$$p(x + y) < \varepsilon.$$

Это в свою очередь означает, что существуют $m \in \mathbb{N}$, векторы $y_1, \dots, y_m \in X$ и векторы $a^1, \dots, a^m \in I_t$ такие, что

$$p\left(x + \sum_{k=1}^m a^k \cdot y_k\right) < \varepsilon. \quad (1.35)$$

Для всякой последовательности чисел $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^m)$, $\lambda^k \in \mathbb{C}$, обозначим

$$f(\lambda) = p\left(x + \sum_{k=1}^m (a^k - \lambda^k \cdot 1_A) \cdot y_k\right).$$

Функция $\lambda \mapsto f(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ совпадает с левой частью (1.35) и поэтому удовлетворяет неравенству

$$f(0) < \varepsilon.$$

С другой стороны, она непрерывна, как композиция аффинного отображения из \mathbb{C}^m в локально выпуклое пространство X и непрерывной функции p на X . Значит, должно существовать число $\delta > 0$ такое, что

$$\forall \lambda \quad \max_{1 \leq k \leq m} |\lambda^k| < \delta \implies f(\lambda) < \varepsilon. \quad (1.36)$$

Рассмотрим далее множество

$$U = \{s \in \text{Спец}(A) : \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad |s(a^k)| < \delta\}.$$

Оно открыто и содержит точку t (потому что включения $a^k \in I_t$ означают систему равенств $t(a^k) = 0$, $1 \leq k \leq m$). С другой стороны, для всякой точки $s \in U$, рассмотрим последовательность

$$\lambda^k = s(a^k),$$

мы получим, во-первых, $s(a^k - \lambda^k \cdot 1_A) = s(a^k) - \lambda^k \cdot s(1_A) = s(a^k) - s(a^k) = 0$, то есть

$$a^k - \lambda^k \cdot 1_A \in I_s$$

и, во-вторых, $\max_k |\lambda^k| = \max_k |s(a^k)| < \delta$, то есть, в силу (1.36),

$$p\left(x + \sum_{k=1}^m \underbrace{(a^k - \lambda^k \cdot 1_A)}_{\substack{\cap \\ I_s}} \cdot y_k\right) = f(\lambda) < \varepsilon$$

Это можно понимать так, что для некоторой точки $z \in I_s \cdot X$ выполняется неравенство

$$p(x + z) < \varepsilon,$$

и поэтому

$$p^0(j^0(x)(s)) = p^0(x + \overline{I_s \cdot X}) = \inf_{z \in I_s \cdot X} p(x + z) = \inf_{z \in I_s \cdot X} p(x + z) < \varepsilon$$

Это верно для всякой точки s из окрестности U точки t , и это то, что нам нужно было доказать. \square

Теорема 1.1. Для всякого стереотипного модуля X над инволютивной стереотипной алгеброй A прямая сумма стереотипных фактор-модулей

$$J_A^0 X = \bigsqcup_{t \in M} (X/\overline{I_t \cdot X})^\nabla$$

обладает единственной топологией, превращающей проекцию

$$\pi_{A,X}^0 : J_A^0 X \rightarrow \text{Spec}(A), \quad \pi_{A,X}^0(x + \overline{I_t \cdot X}) = t, \quad t \in \text{Spec}(A), \quad x \in X$$

в локально выпуклое расслоение с системой полунорм $\{p^0; p \in \mathcal{P}(X)\}$, для которого отображение

$$x \in X \mapsto j^0(x) \in \text{Sec}(\pi_{A,X}^0) \quad \Bigg| \quad j^0(x)(t) = x + \overline{I_t \cdot X}, \quad t \in \text{Spec}(A),$$

непрерывно переводит X в стереотипный A -модуль $\text{Sec}(\pi_{A,X}^0)$ сечений $\pi_{A,X}^0$. При этом

(i) базу топологии $J_A^0 X$ образуют множества

$$W(x, U, p, \delta) = \left\{ \xi \in J_A^0 X : \pi_{A,X}^0(\xi) \in U \text{ \& } p^0\left(\xi - j^0(x)(\pi_{A,X}^0(\xi))\right) < \varepsilon \right\}$$

где $x \in X$, $p \in \mathcal{P}(X)$, $\varepsilon > 0$, U – открытое множество в M ;

(ii) если вдобавок спектр $\text{Spec}(A)$ является паракомпактным локально компактным пространством, то отображение $j^0 : X \rightarrow \text{Sec}(\pi_{A,X}^0)$ имеет плотный образ.

• Расслоение $\pi_A^0 : J_A^0 X \rightarrow \text{Spec}(A)$ называется *расслоением значений* модуля X над алгеброй A .

Доказательство. Из леммы 1.1 и предложения 1.2 следует существование и единственность топологии на $J_A^0 X$, для которой проекция $\pi^0 : J_A^0 X \rightarrow \text{Spec}(A)$ представляет собой локально выпуклое расслоение с полунормами p^0 , а сечения вида $j^0(x)$, $x \in X$, будут непрерывными. Непрерывность отображения $x \in X \mapsto j^0(x) \in \text{Sec}(\pi_{A,X}^0)$ доказывается импликацией

$$p^0(j^0(x)(t)) = \inf_{y \in I_t \cdot X} p(x + y) \leq p(x) \implies p_T^0(j^0(x)(t)) = \sup_{t \in T} p^0(j^0(x)(t)) \leq p(x)$$

для всякого компакта $T \subseteq M$. Свойство (i) также следует из предложения 1.2.

Докажем (ii). Заметим сначала, что множество $j^0(X) = \{j^0(x); x \in X\}$ плотно в порожденном им $C(M)$ -модуле

$$C(M) \cdot j^0(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k b_i \cdot j^0(x_i); b_i \in C(M), x_i \in X \right\}.$$

Для этого зафиксируем $b \in C(M)$ и $x \in X$. Поскольку A – инволютивная алгебра, отображение $\sigma : A \rightarrow C(M)$ должно иметь плотный образ в $C(M)$. Поэтому найдется направленность $a_i \in A$ такая, что

$$\sigma(a_i) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{C(M)} b.$$

Как следствие,

$$j^0(a_i \cdot x) = (1.34) = \sigma(a_i) \cdot j^0(x) \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{C(M)} b \cdot j^0(x).$$

Далее заметим, что поскольку образ X при каждой проекции π_t^0 плотен в фактор-пространстве $(X/\overline{I_t \cdot X})^\nabla$, множество $j^0(X)(\text{Spec}(A))$ будет плотно в каждом слое расслоения $J_A^0 X$. Поэтому его надмножество $(C(M) \cdot j^0(X))(\text{Spec}(A))$ также будет плотно в каждом слое расслоения $J_A^0 X$. Теперь мы можем применить свойство 2° на с.11: если M паракомпактно и локально компактно, то $C(M)$ -модуль $C(M) \cdot j^0(X)$ плотен в $\text{Sec}(\pi_{A,X}^0)$ (а, как мы уже поняли $j^0(X)$ плотен в $C(M) \cdot j^0(X)$). \square

Морфизмы модулей и их связь с морфизмами расслоений.

Теорема 1.2. *Всякий морфизм стереотипных модулей $D : X \rightarrow Y$ над коммутативной инволютивной алгеброй A определяет единственный морфизм расслоений значений $j^0(D) : J_A^0 X \rightarrow J_A^0(Y)$,*

$$\begin{array}{ccc} J_A^0 X & \xrightarrow{j^0(D)} & J_A^0 Y \\ & \searrow \pi_{A,X}^0 & \swarrow \pi_{A,Y}^0 \\ & \text{Spec}(A) & \end{array}$$

удовлетворяющий тождеству

$$j^0(Dx) = j^0(D) \circ j^0(x), \quad x \in X. \quad (1.37)$$

$$\begin{array}{ccc} J_A^0 X & \xrightarrow{j^0(D)} & J_A^0 Y \\ & \swarrow j^0(x) & \searrow j^0(Dx) \\ & \text{Spec}(A) & \end{array}$$

Доказательство. Из очевидного вложения

$$D(\overline{I_t \cdot X}) \subseteq \overline{I_t \cdot Y} \quad (1.38)$$

следует существование естественного отображения фактор-пространств:

$$X / \overline{I_t \cdot X} \ni x + \overline{I_t \cdot X} \mapsto Dx + \overline{I_t \cdot Y} \in Y / \overline{I_t \cdot Y}$$

Оно непрерывно, поскольку исходное отображение D непрерывно, и значит, существует естественное (также, непрерывное) отображение стереотипных фактор-пространств (то есть псевдополнений обычных фактор-пространств):

$$j^0(D) : \left(X / \overline{I_t \cdot X} \right)^\nabla \rightarrow \left(Y / \overline{I_t \cdot Y} \right)^\nabla$$

Это верно для всякого $t \in \text{Spec}(A)$, поэтому возникает отображение прямых сумм:

$$j^0(D) : \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} \left(X / \overline{I_t \cdot X} \right)^\nabla \rightarrow \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} \left(Y / \overline{I_t \cdot Y} \right)^\nabla$$

Тождество (1.37) проверяется прямым вычислением: для любых $t \in \text{Spec}(A)$ и $x \in X$

$$(j^0(D) \circ j^0(x))(t) = j^0(D)(j^0(x)(t)) = j^0(D)(x + \overline{I_t \cdot X}) = Dx + \overline{I_t \cdot Y} = j^0(Dx)(t).$$

Остается проверить непрерывность отображения $j^0(D)$. Зафиксируем точку $\zeta = j^0(x)(t) \in J_A^0 X$, $x \in X$, $t \in T$ и рассмотрим какую-нибудь базисную окрестность ее образа $j^0(D)(\zeta) = j^0(D)(j^0(x)(t)) = j^0(Dx)(t)$ при отображении $j^0(D)$:

$$W(y, V, q, \varepsilon) = \left\{ v \in J_A^0(Y) : \pi_{A,Y}^0(v) \in U \text{ \& } q^0\left(v - j^0(y)(\pi_{A,Y}^0(v))\right) < \varepsilon \right\}.$$

где $q : Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ – произвольная непрерывная полунорма на Y , V – окрестность точки t в $\text{Spec}(A)$, $y \in Y$, $\varepsilon > 0$. Поскольку $j^0(Dx)(t) \in W(y, U, q, \varepsilon)$, должно выполняться условие

$$q^0\left(j^0(Dx)(t) - j^0(y)(t)\right) < \varepsilon.$$

Из него следует, что существуют число $\delta > 0$ и окрестность U точки t , лежащая в V такие, что

$$\pi_{A,Y}^0(v) \in U \text{ \& } q^0\left(v - j^0(Dx)(\pi_{A,Y}^0(v))\right) < \delta \quad \implies \quad q^0\left(j^0(Dx)(\pi_{A,Y}^0(v)) - j^0(y)(\pi_{A,Y}^0(v))\right) < \varepsilon$$

Отсюда следует, что окрестность

$$W(Dx, U, q, \delta) = \left\{ v \in J_A^0(Y) : \pi_{A,Y}^0(v) \in U \text{ \& } q^0\left(v - j^0(Dx)(\pi_{A,Y}^0(v))\right) < \delta \right\}.$$

содержится в окрестности $W(y, V, q, \varepsilon)$ точки $j^0(Dx)(t)$:

$$W(Dx, U, q, \delta) \subseteq W(y, V, q, \varepsilon).$$

Далее вспомним, что $D : X \rightarrow Y$ – непрерывное линейное отображение. Как следствие, существует непрерывная полунорма $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию

$$q(Dx) \leq p(x), \quad x \in X. \quad (1.39)$$

Заметим, что из этого неравенства следует неравенство для полунорм на расслоениях струй:

$$q^0(j^0(D)(\xi)) \leq p^0(\xi), \quad t \in \text{Spec}(A), \quad \xi \in J_A^0 X. \quad (1.40)$$

Это достаточно доказать для точек $\xi = j^0(x)(t)$, $x \in X$, поскольку они плотны в каждом слое:

$$\begin{aligned} q^0(j^0(D)(j^0(x)(t))) &= (1.37) = q^0(j^0(Dx)(t)) = q^0(Dx + \overline{I_t \cdot Y}) = \inf_{v \in I_t \cdot Y} q(Dx + v) \stackrel{(1.38)}{\leq} \\ &\leq \inf_{u \in I_t \cdot X} q(Dx + Du) = \inf_{u \in I_t \cdot X} q(D(x + u)) \leq (1.55) \leq \inf_{u \in I_t \cdot X} p(x + u) = p^0(x + \overline{I_t \cdot X}) = p^0(j^0(x)(t)) \end{aligned}$$

Теперь можно показать, что окрестность

$$W(x, U, p, \delta) = \left\{ \xi \in J_A^0 X : \pi_{A,X}^0(\xi) \in U \text{ \& } p^0(\xi - j^0(x)(\pi_{A,X}^0(\xi))) < \delta \right\}.$$

точки $\zeta = j^0(x)(t)$ при отображении $j^0(D)$ переходит в окрестность $W(Dx, U, q, \delta)$ точки $j^0(D)(\zeta) = j^0(Dx)(t)$:

$$j^0(D)(W(x, U, p, \delta)) \subseteq W(Dx, U, q, \delta) \quad (1.41)$$

Действительно, для всякой точки $\xi \in W(x, U, p, \delta)$ условие $\pi_{A,X}^0(\xi) \in U$ оказывается полезным в конце цепочки

$$\pi_{A,Y}^0(j^0(D)(\xi)) = \pi_{A,X}^0(\xi) \in U$$

а условие $p^0(\xi - j^0(x)(\pi_{A,X}^0(\xi))) < \delta$ в конце цепочки

$$\begin{aligned} q_{j^0(D)(\xi)}(j^0(D)(\xi) - j^0(Dx)(\pi_{A,Y}^0(j^0(D)(\xi)))) &= q_{\pi_{A,X}^0(\xi)}(j^0(D)(\xi) - j^0(Dx)(\pi_{A,X}^0(\xi))) = (1.37) = \\ &= q_{\pi_{A,X}^0(\xi)}(j^0(D)(\xi) - j^0(D)(j^0(x)(\pi_{A,X}^0(\xi)))) = q_{\pi_{A,X}^0(\xi)}(j^0(D)(\xi - j^0(x)(\pi_{A,X}^0(\xi)))) \leq (1.40) \leq \\ &\leq p^0(\xi - j^0(x)(\pi_{A,X}^0(\xi))) < \delta. \end{aligned}$$

Вместе то и другое означает, что $j^0(D)(\xi) \in W(Dx, U, q, \delta)$, а это и требовалось. \square

Морфизмы со значениями в C^* -алгебре и теорема Даунса-Хофманна. Следующий вариант теоремы Даунса-Хофманна отмечался в монографии М. Дюпре и Р. Жилетта [11, Theorem 2.4] (а для случая $C = Z(F)$ – в работе Т. Бекера [4]):

Теорема 1.3. Пусть F – C^* -алгебра и C – ее замкнутая подалгебра, лежащая в центре F :

$$C \subseteq Z(F).$$

Тогда отображение $v : F \rightarrow \text{Sec}(\pi_{C,F}^0)$, переводящее F в алгебру непрерывных сечений расслоения значений $\pi_{C,F}^0 : J_C^0 F \rightarrow \text{Spec}(C)$ над алгеброй C , является изоморфизмом C^* -алгебр:

$$F \cong \text{Sec}(\pi_{C,F}^0).$$

Доказательство. Алгебра C является коммутативной C^* -алгеброй, поэтому ее спектр должен быть компактом. Отсюда следует по теореме 1.1, что отображение $v : F \rightarrow \text{Sec}(\pi_{C,F}^0)$ не только непрерывно, но и имеет плотный образ в $\text{Sec}(\pi_{C,F}^0)$. Поскольку C содержится в центре F , справедливо тождество

$$\overline{I_t \cdot F} = \overline{F \cdot I_t}, \quad t \in \text{Spec}(F),$$

из которого можно сделать вывод, что модули $\overline{I_t \cdot F}$ являются двусторонними идеалами. Поэтому каждый слой

$$F/\overline{I_t \cdot F}$$

является C^* -алгеброй, а проекция $F \rightarrow F/\overline{I_t \cdot F}$ – гомоморфизмом C^* -алгебр. Отсюда следует, что пространство непрерывных сечений $\text{Sec}(\pi_{C,F}^0)$ тоже наделено структурой C^* -алгебры, а отображение $v : F \rightarrow \text{Sec}(\pi_{C,F}^0)$ является гомоморфизмом C^* -алгебр.

Если теперь $\pi : F \rightarrow B(H)$ – какое-то неприводимое представление F , то центр $Z(F)$ оно переводит в скалярные кратные единицы. Иными словами, π отображает $Z(F)$, а значит и C , в подалгебру $\mathbb{C} \cdot 1_{B(H)}$ алгебры $B(H)$. Как следствие, должен существовать характер $t \in \text{Spec}(C)$ такой, что

$$\pi(a) = t(a) \cdot 1_{B(H)}, \quad a \in C.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что π обнуляется на $I_t \cdot F$, потому что

$$\pi(a \cdot x) = \pi(a) \cdot \pi(x) = \underbrace{t(a)}_{\substack{\parallel \\ 0}} \cdot 1_{B(H)} \cdot \pi(x) = 0, \quad a \in I_t, x \in F.$$

Значит, π обнуляется и на $\overline{I_t \cdot F}$:

$$\pi|_{\overline{I_t \cdot F}} = 0.$$

Из этого можно сделать вот какой вывод: если x – какой-то ненулевой вектор из F , то, поскольку найдется неприводимое представление $\pi : F \rightarrow B(H)$, отличное от нуля на x , найдется и какая-то точка $t \in \text{Spec}(C)$ для которой $x \notin \overline{I_t \cdot F}$. Это означает, что $j^0(x)(t) \neq 0$.

Мы поэтому можем заключить, что отображение $v : F \rightarrow \text{Sec}(\pi_C^0 F)$ инъективно. С другой стороны, как мы уже заметили, оно имеет плотный образ. Поскольку непрерывный гомоморфизм C^* -алгебр всегда имеет замкнутый образ [17, Теоремы 3.1.5 и 3.1.6], вложение $F \rightarrow \text{Sec}(\pi)$ обязано быть изоморфизмом C^* -алгебр. \square

Теорема 1.4. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ – инволютивный гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр, причем A коммутативна, B – C^* -алгебра, и $\varphi(A)$ лежит в центре B :

$$\varphi(A) \subseteq Z(B).$$

Тогда отображение $v : B \rightarrow \text{Sec}(\pi_{A,B}^0)$, переводящее B в алгебру непрерывных сечений расслоения значений $\pi_{A,B}^0 : J_A^0 B \rightarrow \text{Spec}(A)$ над алгеброй A , является изоморфизмом C^* -алгебр:

$$B \cong \text{Sec}(\pi_{A,B}^0) \quad (1.42)$$

Доказательство. Обозначим $C = \overline{\varphi(A)}$. По теореме Даунса-Хоффмана 1.3,

$$B \cong \text{Sec}(\pi_{C,B}^0).$$

Поэтому нам достаточно проверить равенство

$$\text{Sec}(\pi_{C,B}^0) \cong \text{Sec}(\pi_{A,B}^0).$$

Ограничение расслоения $\pi_{A,B}^0 : J_A^0 B \rightarrow \text{Spec}(A)$ на подмножество $\text{Spec}(C) \circ \varphi \subseteq \text{Spec}(A)$ совпадает с расслоением $\pi_{C,B}^0 : J_C^0 B \rightarrow \text{Spec}(C)$, потому что по лемме 0.2(i) для каждой точки $t \in \text{Spec}(C)$

$$\overline{\varphi(\text{Ker}(t \circ \varphi))} = \text{Ker } t,$$

и как следствие, слои $J_C^0 B(t)$ и $J_A^0 B(t)$ совпадают:

$$\pi_{C,B}^0(t) = B/\overline{\varphi(\text{Ker } t) \cdot B} = B/\overline{\text{Ker}(t \circ \varphi) \cdot B} = \pi_{A,B}^0(t \circ \varphi).$$

А с другой стороны, по лемме 0.2(ii), над всеми точками $s \in \text{Spec}(A)$, лежащими вне $\text{Spec}(C) \circ \varphi$, слои нулевые:

$$(\pi_{A,B}^0)^{-1}(t) = \{0\}, \quad t \in \text{Spec}(A) \setminus \text{Spec}(C).$$

Отсюда следует, что, во-первых, сечение $x \in \text{Sec}(\pi_{A,B}^0)$ полностью определяется своими значениями на компакте $\text{Spec}(C) \circ \varphi$, то есть своим ограничением на $\text{Spec}(C) \circ \varphi$. И, во-вторых, норма x совпадает с нормой его ограничения на $\text{Spec}(C) \circ \varphi$. Мы получаем, что $\text{Sec}(\pi_{C,B}^0)$ и $\text{Sec}(\pi_{A,B}^0)$ одинаковы по набору элементов и по норме, значит, они изоморфны как банаховы пространства. \square

(с) Расслоение струй и дифференциальные операторы

Если I – левый идеал в алгебре A , то в духе обозначений на с.6, для всякого $n \in \mathbb{N}$ мы определяем степень I^n как линейное подпространство, порожденное всевозможными произведениями элементов из I длины n :

$$I^n = \text{span}\{a_1 \cdots a_n; a_1, \dots, a_n \in I\}.$$

А замкнутая степень $\overline{I^n}$ – как замыкание I^n :

$$\overline{I^n} = \overline{\text{span}}\{a_1 \cdots a_n; a_1, \dots, a_n \in I\}.$$

Понятно, что это будет замкнутый левый идеал в A .

Расслоение струй. Для всякого $t \in \text{Spec}(A)$ пусть, как и раньше, $I_t = \{a \in A : t(a) = 0\}$ – идеал в A , состоящий из элементов, обращающихся в нуль в точке t . Если теперь X – левый модуль над A , то для всякого номера $n \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим идеал I_t^{n+1} , порожденный им подмодуль $\overline{I_t^{n+1} \cdot X}$ в X и фактор-модуль

$$J_t^n(X) = (X / \overline{I_t^{n+1} \cdot X})^\vee. \quad (1.43)$$

Он называется *модулем струй* порядка n модуля X в точке t .

Как обычно, всякая непрерывная полунорма $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ определяет полунорму на фактор-пространстве $J_t^n(X) = (X / \overline{I_t^{n+1} \cdot X})^\vee$ по формуле

$$p_t^n(x + \overline{I_t^{n+1} \cdot X}) := \inf_{y \in I_t^{n+1} \cdot X} p(x + y), \quad x \in X. \quad (1.44)$$

Рассмотрим теперь прямую сумму множеств

$$J_A^n(X) = \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} J_t^n(X) = \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} \left(X / \overline{I_t^{n+1} \cdot X} \right)^\vee$$

и обозначим через $\pi_{A,X}^n$ естественную проекцию $J_A^n(X)$ на $\text{Spec}(A)$:

$$\pi_{A,X}^n : J_A^n(X) \rightarrow \text{Spec}(A), \quad \pi_{A,X}^n(x + \overline{I_t^{n+1} \cdot X}) = t, \quad t \in \text{Spec}(A), x \in X.$$

Кроме того, для всякого вектора $x \in X$ мы рассмотрим отображение

$$j_{A,X}^n(x) : \text{Spec}(A) \rightarrow J_A^n(X) \quad \Bigg| \quad j_{A,X}^n(x)(t) = x + \overline{I_t^{n+1} \cdot X}.$$

Понятно, что для всякого $x \in X$

$$\pi_{A,X}^n \circ j_A^n(x) = \text{id}_{\text{Spec}(A)}.$$

Лемма 1.2. Для всякого элемента $x \in X$ и любой непрерывной полунормы $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ отображение $t \in \text{Spec}(A) \mapsto p_t^n(j_A^n(x)(t)) \in \mathbb{R}_+$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Пусть $t \in \text{Spec}(A)$ и $\varepsilon > 0$. Условие

$$p_t^n(j_A^n(x)(t)) = p_t^n(x + \overline{I_t^{n+1} \cdot X}) = \inf_{y \in I_t^{n+1} \cdot X} p(x + y) = \inf_{y \in I_t^{n+1} \cdot X} p(x + y) < \varepsilon$$

означает, что для некоторого $y \in I_t^{n+1} \cdot X$ выполняется неравенство

$$p(x + y) < \varepsilon.$$

Это в свою очередь означает, что существуют $m \in \mathbb{N}$, векторы $y_1, \dots, y_m \in X$ и матрица векторов $\{a_i^k; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq k \leq m\} \subseteq I_t$ такие, что

$$p\left(x + \sum_{k=1}^m \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i^k\right) \cdot y_k\right) < \varepsilon. \quad (1.45)$$

Для всякой матрицы чисел

$$\lambda = \{\lambda_i^k; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq k \leq m\}, \quad \lambda_i^k \in \mathbb{C}$$

обозначим

$$f(\lambda) = p \left(x + \sum_{k=1}^m \left(\prod_{i=1}^{n+1} (a_i^k - \lambda_i^k \cdot 1_A) \right) \cdot y_k \right).$$

Функция $\lambda \mapsto f(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ совпадает с левой частью (1.45) и поэтому удовлетворяет неравенству

$$f(0) < \varepsilon.$$

С другой стороны, она непрерывна, как композиция многочлена от $m \cdot (n+1)$ комплексных переменных со значениями в локально выпуклом пространстве X и непрерывной функции p на X . Значит, должно существовать число $\delta > 0$ такое, что

$$\forall \lambda \quad \max_{i,k} |\lambda_i^k| < \delta \implies f(\lambda) < \varepsilon. \quad (1.46)$$

Рассмотрим далее множество

$$U = \{s \in \text{Spec}(A) : \forall i, k \quad |s(a_i^k)| < \delta\}.$$

Оно открыто и содержит точку t (потому что включения $a_i^k \in I_t$ означают систему равенств $t(a_i^k) = 0$, $1 \leq i \leq n+1$, $1 \leq k \leq m$). С другой стороны, для всякой точки $s \in U$, рассмотрим матрицу

$$\lambda_i^k = s(a_i^k),$$

мы получим, во-первых, $s(a_i^k - \lambda_i^k \cdot 1_A) = s(a_i^k) - \lambda_i^k \cdot s(1_A) = s(a_i^k) - s(a_i^k) = 0$, то есть

$$a_i^k - \lambda_i^k \cdot 1_A \in I_s$$

и, во-вторых, $\max_{i,k} |\lambda_i^k| = \max_{i,k} |s(a_i^k)| < \delta$, то есть, в силу (1.46),

$$p \left(x + \sum_{k=1}^m \left(\underbrace{\prod_{i=1}^{n+1} (a_i^k - \lambda_i^k \cdot 1_A)}_{\cap I_s} \right) \cdot y_k \right) = f(\lambda) < \varepsilon$$

Это можно понимать так, что для некоторой точки $z \in I_s^{n+1} \cdot X$ выполняется неравенство

$$p(x+z) < \varepsilon,$$

которое, в свою очередь, влечет за собой неравенство

$$p_s^n(j_A^n(x)(s)) = p_s^n(x + \overline{I_s^{n+1} \cdot X}) = \inf_{z \in \overline{I_s^{n+1} \cdot X}} p(x+z) = \inf_{z \in I_s^{n+1} \cdot X} p(x+z) < \varepsilon$$

Оно верно для всякой точки s из окрестности U точки t , и как раз это нам и нужно было доказать. \square

Теорема 1.5. Для всякого стереотипного модуля X над инволютивной стереотипной алгеброй A прямая сумма стереотипных фактор-модулей

$$J_A^n X = \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} J_t^n(X) = \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} (X / \overline{I_t^{n+1} \cdot X})^\nabla$$

обладает единственной топологией, превращающей проекцию

$$\pi_{A,X}^n : J_A^n X \rightarrow \text{Spec}(A), \quad \pi_{A,X}^n(x + \overline{I_t^{n+1} \cdot X}) = t, \quad t \in \text{Spec}(A), \quad x \in X$$

в локально выпуклое расслоение с системой полунорм $\{p^n; p \in \mathcal{P}(X)\}$, для которого отображение

$$x \in X \mapsto j^n(x) \in \text{Sec}(\pi^n) \quad \Bigg| \quad j^n(x)(t) = x + \overline{I_t^{n+1} \cdot X}, \quad t \in \text{Spec}(A),$$

непрерывно переводит X в стереотипный A -модуль $\text{Sec}(\pi_{A,X}^n)$ непрерывных сечений $j_A^n X$. При этом базу топологии $J_A^n X$ образуют множества

$$W(x, U, p, \varepsilon) = \left\{ \xi \in J_A^n(X) : \pi^n(\xi) \in U \ \& \ p_{\pi^n(\xi)}^n(\xi - j^n(x)(\pi^n(\xi))) < \varepsilon \right\}$$

где $x \in X$, $p \in \mathcal{P}(X)$, $\varepsilon > 0$, U – открытое множество в M ;

- Расслоение $\pi_{A,X}^n : J_A^n(X) \rightarrow \text{Спец}(A)$ называется *расслоением струй порядка n* модуля X над алгеброй A .

Доказательство. Из леммы 1.2 и предложения 1.2 следует существование и единственность топологии на $J_A^n X$, для которой проекция $j_A^n X : J_A^n X \rightarrow \text{Спец}(A)$ представляет собой локально выпуклое расслоение с полунормами p_t^n , а сечения вида $j^n(x)$, $x \in X$, будут непрерывными. Непрерывность отображения $x \in X \mapsto j^n(x) \in \text{Спец}(j_A^n X)$ доказывается импликацией

$$p_t^n(j^n(x)(t)) = \inf_{y \in I_t^{n+1} \cdot X} p(x+y) \leq p(x) \implies \sup_{t \in T} p_t^n(j^n(x)(t)) \leq p(x)$$

для всякого компакта $T \subseteq M$. Свойство (i) также следует из предложения 1.2.

Докажем (ii). Заметим сначала, что множество $j^n(X) = \{j^n(x); x \in X\}$ плотно в порожденном им $C(M)$ -модуле

$$C(M) \cdot j^n(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k b_i \cdot j^n(x_i); b_i \in C(M), x_i \in X \right\}.$$

Для этого зафиксируем $b \in C(M)$ и $x \in X$. Поскольку A – инволютивная алгебра, отображение $\sigma : A \rightarrow C(M)$ должно иметь плотный образ в $C(M)$. Поэтому найдется направленность $a_i \in A$ такая, что

$$\sigma(a_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} b.$$

Как следствие,

$$j^n(a_i \cdot x) = (1.34) = \sigma(a_i) \cdot j^n(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} b \cdot j^n(x).$$

Далее заметим, что поскольку образ X при каждой проекции π_t^n плотен в фактор-пространстве $(X/\overline{I_t \cdot X})^\nabla$, множество $j^n(X)(\text{Спец}(A))$ будет плотно в каждом слое расслоения $J_A^n X$. Поэтому его надмножество $(C(M) \cdot j^n(X))(\text{Спец}(A))$ также будет плотно в каждом слое расслоения $J_A^n X$. Теперь мы можем применить свойство 2° на с.11: если M паракомпактно и локально компактно, то $C(M)$ -модуль $C(M) \cdot j^n(X)$ плотен в $\text{Спец}(\pi^n)$ (а, как мы уже поняли $j^n(X)$ плотен в $C(M) \cdot j^n(X)$). \square

Дифференциальные операторы. Пусть X и Y – два левых стереотипных модуля над стереотипной алгеброй A . Для всякого линейного (над \mathbb{C}) отображения $P : X \rightarrow Y$ и любого элемента $a \in A$ отображение $[P, a] : X \rightarrow Y$, действующее по формуле

$$[P, a](x) = P(a \cdot x) - a \cdot P(x), \quad x \in X, \quad (1.47)$$

называется *коммутатором* отображения P с элементом a . Если даны два элемента $a, b \in A$, то коммутатор отображения P с парой элементов (a, b) определяется как коммутатор $[[P, a], b] : X \rightarrow Y$ отображения $[P, a]$ с элементом b . Точно так же по индукции определяется коммутатор с произвольной конечной последовательностью элементов (a_0, \dots, a_n) :

$$[\dots[P, a_0], \dots a_n]$$

Линейное (над \mathbb{C}) непрерывное отображение $D : X \rightarrow Y$ называется *дифференциальным оператором* из X в Y , если существует число $n \in \mathbb{Z}_+$ такое, что для любых $a_0, \dots, a_n \in A$ выполняется равенство

$$[\dots[P, a_0], \dots a_n] = 0. \quad (1.48)$$

Наименьшее из чисел $n \in \mathbb{Z}_+$, для которых справедливо (1.48), называется *порядком* дифференциального оператора D и обозначается $\deg D$.

Множество всех дифференциальных операторов из X в Y порядка не больше n мы будем обозначать символом $\text{Diff}^n(X, Y)$. Если дополнительно ввести обозначение

$$\text{Diff}^{-1}(X, Y) = \{P \in Y \otimes X : P = 0\},$$

то эту последовательность пространств можно определить следующими индуктивным правилом:

$$\text{Diff}^{n+1}(X, Y) = \{P \in Y \otimes X : \forall a \in A \quad [P, a] \in \text{Diff}^n(X, Y)\} \quad (1.49)$$

Очевидно, что

$$[\text{Diff}^n, A] \subseteq \text{Diff}^{n-1} \quad (1.50)$$

Лемма 1.3. Если $D : X \rightarrow Y$ – дифференциальный оператор порядка $n \in \mathbb{Z}_+$, то подмодуль $\overline{I^n \cdot X}$ он переводит в подмодуль $\overline{I \cdot Y}$:

$$D \in \text{Diff}^n(X, Y) \implies D(\overline{I^{n+1} \cdot X}) \subseteq \overline{I \cdot Y}. \quad (1.51)$$

Доказательство. Поскольку оператор D непрерывен, достаточно доказать включение

$$D \in \text{Diff}^n(X, Y) \implies D(I^{n+1} \cdot X) \subseteq I \cdot Y. \quad (1.52)$$

Это делается индукцией по $n \in \mathbb{Z}_+$. При $n = 0$ утверждение принимает вид

$$D \in \text{Diff}^0(X, Y) \implies D(I \cdot X) \subseteq I \cdot Y,$$

и это очевидно, потому что дифференциальный оператор порядка $n = 0$ представляет собой просто однородное отображение

$$D(a \cdot x) = a \cdot D(x), \quad a \in A, \quad x \in X.$$

Предположим, что мы доказали вложение (1.52) для $n = k$:

$$D \in \text{Diff}^k(X, Y) \implies D(I^{k+1} \cdot X) \subseteq I \cdot Y.$$

Тогда для $n = k + 1$ получаем: если $D \in \text{Diff}^{k+1}(X, Y)$, то для всякого $a \in A$ должно выполняться включение $[D, a] \in \text{Diff}^k(X, Y)$, поэтому, в силу предположения индукции, $[D, a](I^{k+1} \cdot X) \subseteq I \cdot Y$. Это означает, что для всякого вектора $x \in X$ и любой последовательности $a_0, \dots, a_k \in I$ выполняется включение

$$\begin{aligned} [D, a](\underbrace{a_0 \cdot \dots \cdot a_k \cdot x}_{\parallel}) &\in I \cdot Y \\ D(a \cdot a_0 \cdot \dots \cdot a_k \cdot x) - a \cdot D(a_0 \cdot \dots \cdot a_k \cdot x) & \end{aligned}$$

из которого следует

$$D(a \cdot a_0 \cdot \dots \cdot a_k \cdot x) \in I \cdot Y + \underbrace{a \cdot D(a_0 \cdot \dots \cdot a_k \cdot x)}_{\in I \cdot Y} \subseteq I \cdot Y$$

Поскольку это верно для любых $a, a_0, \dots, a_k \in I$, мы получаем нужное нам включение $D(I^{k+2} \cdot X) \subseteq I \cdot Y$. \square

Теорема 1.6. Всякий дифференциальный оператор $D : X \rightarrow Y$ порядка n определяет некий морфизм расслоений струй $j_n[D] : J_A^n(X) \rightarrow J_A^n(Y)$, удовлетворяющий тождеству

$$j^0(Dx) = j_n[D] \circ j^n(x), \quad x \in X. \quad (1.53)$$

Доказательство. Из вложения (1.51), примененного к идеалу I_t , где $t \in \text{Spec}(A)$

$$D(\overline{I_t^{n+1} \cdot X}) \subseteq \overline{I_t \cdot Y} \quad (1.54)$$

следует существование естественного отображения фактор-пространств:

$$X / \overline{I_t^{n+1} \cdot X} \ni x + \overline{I_t^{n+1} \cdot X} \mapsto Dx + \overline{I_t \cdot Y} \in Y / \overline{I_t \cdot Y}$$

Оно непрерывно, поскольку исходное отображение D непрерывно, и значит, существует естественное (также непрерывное) отображение стереотипных фактор-пространств (то есть псевдопополнений обычных фактор-пространств):

$$j_n[D]_t : \left(X / \overline{I_t^{n+1} \cdot X} \right)^\nabla \rightarrow \left(Y / \overline{I_t \cdot Y} \right)^\nabla$$

Это верно для всякого $t \in \text{Spec}(A)$, поэтому возникает отображение прямых сумм:

$$j_n[D] : \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} \left(X / \overline{I_t^{n+1} \cdot X} \right)^\nabla \rightarrow \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} \left(Y / \overline{I_t \cdot Y} \right)^\nabla$$

Тождество (1.53) проверяется прямым вычислением: для любых $t \in \text{Spec}(A)$ и $x \in X$

$$(j_n[D] \circ j^n(x))(t) = j_n[D](j^n(x)(t)) = j_n[D](x + \overline{I_t^{n+1} \cdot X}) = Dx + \overline{I_t \cdot Y} = j^0(Dx)(t).$$

Остается проверить непрерывность отображения $j_n[D]$. Зафиксируем точку $\zeta = j^n(x)(t) \in J_A^n(X)$, $x \in X$, $t \in T$ и рассмотрим какую-нибудь базисную окрестность ее образа $j_n[D](\zeta) = j_n[D](j^n(x)(t)) = j^0(Dx)(t)$ при отображении $j_n[D]$:

$$W(y, V, q, \varepsilon) = \left\{ v \in J_A^n(Y) : \pi_Y(v) \in U \text{ \& } q_{\pi_Y(v)}^n \left(v - j^0(y)(\pi_Y(v)) \right) < \varepsilon \right\}.$$

где $q : Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ – произвольная непрерывная полунорма на Y , V – окрестность точки t в $\text{Spec}(A)$, $y \in Y$, $\varepsilon > 0$. Поскольку $j^0(Dx)(t) \in W(y, U, q, \varepsilon)$, должно выполняться условие

$$q_t^0 \left(j^0(Dx)(t) - j^0(y)(t) \right) < \varepsilon.$$

Из него следует, что существуют число $\delta > 0$ и окрестность U точки t , лежащая в V такие, что

$$\pi_Y(v) \in U \text{ \& } q_{\pi_Y(v)}^n \left(v - j^0(Dx)(\pi_Y(v)) \right) < \delta \quad \implies \quad q_{\pi_Y(v)}^0 \left(j^0(Dx)(\pi_Y(v)) - j^0(y)(\pi_Y(v)) \right) < \varepsilon$$

Отсюда следует, что окрестность

$$W(Dx, U, q, \delta) = \left\{ v \in J_A^n(Y) : \pi_Y(v) \in U \text{ \& } q_{\pi_Y(v)}^0 \left(v - j^0(Dx)(\pi_Y(v)) \right) < \delta \right\}.$$

содержится в окрестности $W(y, V, q, \varepsilon)$ точки $j^0(Dx)(t)$:

$$W(Dx, U, q, \delta) \subseteq W(y, V, q, \varepsilon).$$

Далее вспомним, что $D : X \rightarrow Y$ – непрерывное линейное отображение. Как следствие, существует непрерывная полунорма $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условию

$$q(Dx) \leq p(x), \quad x \in X. \quad (1.55)$$

Заметим, что из этого неравенства следует неравенство для полунорм на расслоениях струй:

$$q_t^0(j_n[D](\xi)) \leq p_t^n(\xi), \quad t \in \text{Spec}(A), \quad \xi \in J_A^n(X). \quad (1.56)$$

Это достаточно доказать для точек $\xi = j^n(x)(t)$, $x \in X$, поскольку они плотны в каждом слое:

$$\begin{aligned} q_t^0(j_n[D](j^n(x)(t))) &= (1.53) = q_t^0(j^0(Dx)(t)) = q_t^0(Dx + \overline{I_t \cdot Y}) = \inf_{v \in I_t \cdot Y} q(Dx + v) \stackrel{(1.52)}{\leq} \\ &\stackrel{I_t \cdot Y \supseteq D(I_t^{n+1} \cdot Y)}{\leq} \inf_{u \in I_t^{n+1} \cdot X} q(Dx + Du) = \inf_{u \in I_t^{n+1} \cdot X} q(D(x+u)) \leq (1.55) \leq \inf_{u \in I_t^{n+1} \cdot X} p(x+u) = p_t^n(x + \overline{I_t^{n+1} \cdot X}) = p_t^n(j^n(x)(t)) \end{aligned}$$

Теперь можно показать, что окрестность

$$W(x, U, p, \delta) = \left\{ \xi \in J_A^n(X) : \pi_X(\xi) \in U \text{ \& } p_{\pi_X(\xi)}^n \left(\xi - j^n(x)(\pi_X(\xi)) \right) < \delta \right\}.$$

точки $\zeta = j^n(x)(t)$ при отображении $j_n[D]$ переходит в окрестность $W(Dx, U, q, \delta)$ точки $j_n[D](\zeta) = j^0(Dx)(t)$:

$$j_n[D](W(x, U, p, \delta)) \subseteq W(Dx, U, q, \delta) \quad (1.57)$$

Действительно, для всякой точки $\xi \in W(x, U, p, \delta)$ условие $\pi_X(\xi) \in U$ оказывается полезным в конце цепочки

$$\pi_Y(j_n[D](\xi)) = \pi_X(\xi) \in U$$

а условие $p_{\pi_X(\xi)}^n \left(\xi - j^n(x)(\pi_X(\xi)) \right) < \delta$ в конце цепочки

$$\begin{aligned} q_{j_n[D](\xi)}^0 \left(j_n[D](\xi) - j^0(Dx)(\pi_Y(j_n[D](\xi))) \right) &= q_{\pi_X(\xi)}^0 \left(j_n[D](\xi) - j^0(Dx)(\pi_X(\xi)) \right) = (1.53) = \\ &= q_{\pi_X(\xi)}^0 \left(j_n[D](\xi) - j_n[D](j^n(x)(\pi_X(\xi))) \right) = q_{\pi_X(\xi)}^0 \left(j_n[D](\xi - j^n(x)(\pi_X(\xi))) \right) \leq (1.56) \leq \\ &\leq p_{\pi_X(\xi)}^n \left(\xi - j^n(x)(\pi_X(\xi)) \right) < \delta. \end{aligned}$$

Вместе то и другое означает, что $j_n[D](\xi) \in W(Dx, U, q, \delta)$, а это и требовалось. \square

Теорема 1.7. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ – гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр, причем A коммутативна, B – C^* -алгебра, и $\varphi(A)$ лежит в центре B :

$$\varphi(A) \subseteq Z(B).$$

Тогда всякий морфизм расслоений струй $\mu : J_A^n(A) \rightarrow J_A^0(B)$ определяет единственный дифференциальный оператор $D : A \rightarrow B$ порядка n , удовлетворяющий тождеству

$$j^0(Dx) = \mu \circ j^n(x), \quad x \in X. \quad (1.58)$$

Доказательство. По теореме 1.4, отображение $v : B \rightarrow \text{Sec}(\pi_{A,B}^0)$, переводящее B в алгебру непрерывных сечений расслоения значений $\pi_{A,B}^0 : J_A^0 B \rightarrow \text{Spec}(A)$ над алгеброй A , является изоморфизмом C^* -алгебр:

$$B \cong \text{Sec}(\pi_{A,B}^0).$$

Рассмотрим обратный изоморфизм $v^{-1} : \text{Sec}(\pi_{A,B}^0) \rightarrow B$:

$$v^{-1}(j^0(b)) = b, \quad b \in B. \quad (1.59)$$

Тогда всякому морфизму расслоений струй $\mu : J_A^n(A) \rightarrow J_A^0(B)$ можно поставить в соответствие оператор $D : A \rightarrow B$ по формуле

$$Da = v^{-1}\left(\mu \circ j^n(a)\right), \quad a \in A. \quad (1.60)$$

Он, очевидно, будет удовлетворять тождеству (1.58), и нам нужно лишь убедиться, что он дифференциальный порядка n . □

Дифференциальные операторы на алгебрах. Всякий гомоморфизм алгебр $\varphi : A \rightarrow B$ задает на B структуру левого A -модуля по формуле:

$$a \cdot y = \varphi(a) \cdot y, \quad a \in A, y \in Y = B.$$

Если теперь $P : A \rightarrow B$ – произвольное линейное (над \mathbb{C}) отображение, то формула (1.47) его коммутатора с элементом $a \in A$ в данной ситуации имеет вид

$$[P, a](x) = P(a \cdot x) - \varphi(a) \cdot P(x), \quad a, x \in A,$$

Этот оператор мы будем называть *коммутатором оператора $P : A \rightarrow B$ и элемента $a \in A$ относительно гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$* . Кроме того, для любого элемента $b \in B$ мы будем рассматривать линейное (над \mathbb{C}) отображение $b \cdot P : A \rightarrow B$, определенное формулой

$$(b \cdot P)(x) = b \cdot P(x), \quad x \in A.$$

Предложение 1.4. Справедливы тождества:

$$[\varphi, a] = 0, \quad a \in A \quad (1.61)$$

$$[b \cdot P, a] = b \cdot [P, a] + [b, \varphi(a)] \cdot P, \quad a \in A, b \in B, P \in B \otimes A, \quad (1.62)$$

$$[b \cdot \varphi, a] = [b, \varphi(a)] \cdot \varphi, \quad a \in A, b \in B. \quad (1.63)$$

Доказательство. Первое и второе тождества доказываются прямым вычислением: при $x \in A$ мы получаем

$$[\varphi, a](x) = \varphi(a \cdot x) - \varphi(a) \cdot \varphi(x) = 0,$$

и

$$\begin{aligned} [b \cdot P, a](x) &= (b \cdot P)(a \cdot x) - \varphi(x) \cdot (b \cdot P)(x) = b \cdot P(a \cdot x) - \varphi(x) \cdot b \cdot P(x) = \\ &= b \cdot P(a \cdot x) - b \cdot \varphi(x) \cdot P(x) + b \cdot \varphi(x) \cdot P(x) - \varphi(x) \cdot b \cdot P(x) = b \cdot \left(P(a \cdot x) - \varphi(x) \cdot P(x) \right) + \left(b \cdot \varphi(x) - \varphi(x) \cdot b \right) \cdot P(x) = \\ &= b \cdot [P, a](x) + [b, \varphi(x)] \cdot P(x) = \left(b \cdot [P, a] + [b, \varphi(a)] \cdot P \right)(x). \end{aligned}$$

А третье после этого становится следствием первого и второго:

$$[b \cdot \varphi, a] = (1.62) = b \cdot \underbrace{[\varphi, a_0]}_{\substack{\parallel (1.61) \\ 0}} + [b, \varphi(a)] \cdot \varphi$$

□

Заданный гомоморфизм алгебр $\varphi : A \rightarrow B$ порождает систему дифференциальных операторов из A в B , которую мы будем обозначать $\text{Diff}^n(\varphi)$ или просто Diff^n . Она индуктивно определяется правилами

$$\text{Diff}^{-1}(\varphi) = \{P \in B \otimes A : P = 0\}, \quad (1.64)$$

$$\text{Diff}^{n+1}(\varphi) = \{P \in B \otimes A : \forall a \in A \quad [P, a] \in \text{Diff}^n(\varphi)\} \quad (1.65)$$

Понятно, что пространства $\text{Diff}^n(\varphi)$ образуют расширяющуюся последовательность:

$$0 = \text{Diff}^{-1}(\varphi) \subseteq \text{Diff}^0(\varphi) \subseteq \text{Diff}^1(\varphi) \subseteq \dots \subseteq \text{Diff}^n(\varphi) \subseteq \text{Diff}^{n+1}(\varphi) \subseteq \dots$$

Кроме того нам будет важна последовательность подпространств в B , обозначаемых $Z^n(\varphi)$, или просто Z^n , и определяемых индуктивными правилами

$$Z^0(\varphi) = 0 \quad (1.66)$$

$$Z^{n+1}(\varphi) = \{b \in B : \forall a \in A \quad [b, \varphi(a)] \in Z^n(\varphi)\} \quad (1.67)$$

Очевидно, что пространства $Z^n(\varphi)$ также образуют расширяющуюся последовательность:

$$0 = Z^0(\varphi) \subseteq Z^1(\varphi) \subseteq \dots \subseteq Z^n(\varphi) \subseteq Z^{n+1}(\varphi) \subseteq \dots \quad (1.68)$$

Предложение 1.5. *Справедливы включения:*

$$[Z^q \cdot \text{Diff}^p, A] \subseteq Z^q \cdot \text{Diff}^{p-1} + Z^{q-1} \cdot \text{Diff}^p, \quad (1.69)$$

$$Z^0 \cdot \text{Diff}^p \subseteq \text{Diff}^{-1} = 0, \quad p \geq 0 \quad (1.70)$$

$$Z^q \cdot \text{Diff}^0 \subseteq \text{Diff}^{q-1}, \quad q \geq 0 \quad (1.71)$$

$$Z^q \cdot \text{Diff}^p \subseteq \text{Diff}^{q+p-1}, \quad q \geq 0 \quad (1.72)$$

Доказательство. 1. Для доказательства (1.69) берем произвольные $b \in Z^q$, $P \in \text{Diff}^p$ и $a \in A$, тогда

$$[b \cdot P, a] = \underbrace{b \cdot [P, a]}_{\substack{\text{Diff}^{p-1} \\ \cap \\ \text{Diff}^{p-1}}} + \underbrace{[b, \varphi(a)] \cdot P}_{\substack{\text{Diff}^p \\ \cap \\ Z^{q-1}}} \in Z^q \cdot \text{Diff}^{p-1} + Z^{q-1} \cdot \text{Diff}^p$$

2. Утверждение (1.70) очевидно, потому что при умножении на нуль всегда получается нуль.

3. Формула (1.71) доказывается индукцией. При $q = 0$ она верна, потому что превращается в частный случай формулы (1.70) с $p = 0$:

$$Z^0 \cdot \text{Diff}^0 \subseteq \text{Diff}^{-1} = 0.$$

Предположим, мы ее доказали для какого-то $q = n$:

$$Z^n \cdot \text{Diff}^0 \subseteq \text{Diff}^{n-1} \quad (1.73)$$

Тогда для $q = n + 1$ мы получим: если $b \in Z^q = Z^{n+1}$ и $P \in \text{Diff}^0$, то

$$\left(\forall a \in A \quad [b \cdot P, a] = b \cdot \underbrace{[P, a]}_{\substack{\text{Diff}^0 \\ \cap \\ 0}} + \underbrace{[b, \varphi(a)] \cdot P}_{\substack{\text{Diff}^0 \\ \cap \\ Z^n}} \stackrel{(1.73)}{\in} \text{Diff}^{n-1} \right) \implies b \cdot P \in \text{Diff}^n = \text{Diff}^{q-1}$$

4. Формула (1.72) доказывается индукцией по p . При $p = 0$ она верна, потому что превращается в уже доказанную формулу (1.71). Предположим, что мы ее доказали для какого-то $p = n$:

$$Z^q \cdot \text{Diff}^n \subseteq \text{Diff}^{q+n-1}, \quad q \geq 0 \quad (1.74)$$

Тогда для $p = n + 1$ и $a_1, \dots, a_q \in A$ мы получим

$$[Z^q \cdot \text{Diff}^{n+1}, a_1] \stackrel{(1.69)}{\subseteq} \underbrace{Z^q \cdot \text{Diff}^n}_{\substack{\cap \\ \text{Diff}^{q+n-1}}} + Z^{q-1} \cdot \text{Diff}^{n+1} \subseteq \text{Diff}^{q+n-1} + Z^{q-1} \cdot \text{Diff}^{n+1}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned}
[[Z^q \cdot \text{Diff}^{n+1}, a_1], a_2] &\subseteq \underbrace{[\text{Diff}^{q+n-1}, a_2]}_{\cap_{\text{Diff}^{q+n-2}} (1.50)} + [Z^{q-1} \cdot \text{Diff}^{n+1}, a_2] \subseteq \\
&\subseteq \text{Diff}^{q+n-2} + \underbrace{[Z^{q-1} \cdot \text{Diff}^n]}_{\cap_{\text{Diff}^{q+n-2}} (1.74)} + Z^{q-1} \cdot \text{Diff}^{n+1} \subseteq \text{Diff}^{q+n-2} + Z^{q-2} \cdot \text{Diff}^{n+1} \\
&\quad \Downarrow \\
&\quad \dots \\
&\quad \Downarrow \\
[...[[Z^q \cdot \text{Diff}^{n+1}, a_1], a_2], \dots, a_q] &\subseteq \text{Diff}^{q+n-q} + Z^{q-q} \cdot \text{Diff}^{n+1} = \text{Diff}^n + Z^0 \cdot \text{Diff}^{n+1} = \text{Diff}^n
\end{aligned}$$

Это верно для любых $a_1, \dots, a_q \in A$, поэтому

$$Z^q \cdot \text{Diff}^{n+1} \subseteq \text{Diff}^{q+n} = \text{Diff}^{q+p-1}$$

□

Предложение 1.6. Для всякого элемента $b \in B$

$$b \cdot \varphi \in \text{Diff}^n(\varphi) \iff b \in Z^{n+1}(\varphi) \quad (1.75)$$

Доказательство. Здесь используется формула (1.63), которую нужно обобщить до тождества

$$[...[b \cdot \varphi, a_0], \dots, a_n] = [...[b, \varphi(a_0)], \dots, \varphi(a_n)] \cdot \varphi, \quad a_0, \dots, a_n \in A.$$

Из него видно, что если $b \in Z^{n+1}(\varphi)$, то коэффициент при φ справа будет нулевым, и поэтому вся правая часть будет равна нулю. Поскольку это верно для любых $a_0, \dots, a_n \in A$, мы получаем, что $b \cdot \varphi \in \text{Diff}^n(\varphi)$. И наоборот, если $b \cdot \varphi \in \text{Diff}^n(\varphi)$, то левая часть будет нулевой, поэтому, в частности, при подстановке единицы, мы получаем

$$0 = [...[b \cdot \varphi, a_0], \dots, a_n](1_A) = [...[b, \varphi(a_0)], \dots, \varphi(a_n)] \cdot \varphi(1_A) = [...[b, \varphi(a_0)], \dots, \varphi(a_n)] \cdot 1_B = [...[b, \varphi(a_0)], \dots, \varphi(a_n)].$$

Опять это верно для любых $a_0, \dots, a_n \in A$, поэтому $b \in Z^{n+1}(\varphi)$. □

Дифференциальные операторы со значениями в C^* -алгебре. Пусть A – инволютивная замкнутая подалгебра в C^* -алгебре B . Рассмотрим последовательность $Z^n(A)$ подпространств в B , определенных индуктивными правилами:

$$Z^0(A) = 0 \quad (1.76)$$

$$Z^{n+1}(A) = \{b \in B : \forall a \in A \quad [b, a] \in Z^n(A)\} \quad (1.77)$$

Теорема 1.8. Для всякой C^* -алгебры B и любой ее замкнутой инволютивной подалгебры A последовательность подпространств $Z^n(A)$ стабилизируется начиная с номера $n = 1$:

$$Z^n(A) = Z^{n+1}(A), \quad n \geq 1. \quad (1.78)$$

Условимся *проектором* в локально выпуклом пространстве X называть всякий линейный непрерывный оператор $P : X \rightarrow X$ со свойством идемпотентности:

$$P^2 = P.$$

Всякий такой оператор действует как тождественный на своем образе [5, с.37]:

$$\forall y \in \text{Im } P \quad P(y) = y. \quad (1.79)$$

Лемма 1.4. Для всякого локально выпуклого пространства X , любого проектора P в X и любого линейного непрерывного оператора T в X условие коммутирования

$$[T, P] = 0$$

эквивалентно инвариантности образа $\text{Im } P$ и ядра $\text{Ker } P$ оператора P относительно оператора T :

$$T(\text{Im } P) \subseteq \text{Im } P \quad \& \quad T(\text{Ker } P) \subseteq \text{Ker } P. \quad (1.80)$$

Доказательство. 1. Пусть $TP = PT$. Тогда если $x \in \operatorname{Im} P$, то есть $x = Px$, то $Tx = TPx = PTx \in \operatorname{Im} P$. Если же $x \in \operatorname{Ker} P$, то есть $Px = 0$, то $PTx = TPx = 0$ и поэтому $Tx \in \operatorname{Ker} P$.

2. Наоборот, пусть выполнено (1.80). Тогда для всякого вектора $x \in X$ обозначив

$$x_{\parallel} = Px, \quad x_{\perp} = x - x_{\parallel},$$

мы получим:

$$\begin{cases} x_{\parallel} \in \operatorname{Im} P & \implies Tx_{\parallel} \in \operatorname{Im} P \\ x_{\perp} \in \operatorname{Ker} P & \implies Tx_{\perp} \in \operatorname{Ker} P \end{cases},$$

поэтому

$$PTx = PT(x_{\parallel} + x_{\perp}) = P(\underbrace{Tx_{\parallel}}_{\operatorname{Im} P} + \underbrace{Tx_{\perp}}_{\operatorname{Ker} P}) = P \underbrace{Tx_{\parallel}}_{\operatorname{Im} P} = (1.79) = Tx_{\parallel} = TPx.$$

□

Лемма 1.5. Для всякого локально выпуклого пространства X , любого проектора P в X и любого линейного непрерывного оператора T в X условие

$$[[T, P], P] = 0$$

влечет за собой условие

$$[T, P] = 0.$$

Доказательство. Из леммы 1.4 следует, что пространства $\operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Ker} P$ инвариантны для оператора $[T, P]$:

$$[T, P](\operatorname{Im} P) \subseteq \operatorname{Im} P \quad \& \quad [T, P](\operatorname{Ker} P) \subseteq \operatorname{Ker} P.$$

Первое из этих условий означает, что для всякого $x \in \operatorname{Im} P$ справедлива цепочка

$$TPx - \underbrace{PTx}_{\operatorname{Im} P} \in \operatorname{Im} P \implies T \underbrace{Px}_{\operatorname{Im} P} \in \operatorname{Im} P \implies Tx \in \operatorname{Im} P.$$

А второе – что для всякого $x \in \operatorname{Ker} P$ справедлива цепочка

$$T \underbrace{Px}_{\operatorname{Ker} P} - PTx \in \operatorname{Ker} P \implies PTx \in \operatorname{Ker} P \implies \underbrace{P^2Tx}_{\operatorname{Ker} P} = 0 \implies Tx \in \operatorname{Ker} P.$$

Вместе эти две цепочки означают выполнение условия (1.80), которое опять по лемме 1.4 эквивалентно равенству $[T, P] = 0$. □

Доказательство теоремы 1.8. 1. Пусть сначала B – алгебра ограниченных операторов на каком-нибудь гильбертовом пространстве H : $B = \mathcal{B}(H)$. Заметим, что при замене A на его бикоммутант $A^{\perp\perp}$ в $\mathcal{B}(H)$ последовательность подпространств $Z^n(A)$ не меняется:

$$Z^n(A^{\perp\perp}) = Z^n(A).$$

Поэтому можно с самого начала считать, что A совпадает со своим бикоммутантом, то есть является алгеброй фон Неймана в $\mathcal{B}(H)$. Тогда A порождается системой своих ортогональных проекторов $P \in A$: $A = \{P\}^{\perp\perp}$. Для всякого такого проектора P и любого элемента $T \in Z^2(A)$ мы получаем равенство $[[T, P], P] = 0$, которое по лемме 1.5 влечет $[T, P] = 0$. Поскольку проекторы P порождают A , это влечет равенство

$$[T, a] = 0, \quad a \in A.$$

То есть $T \in Z^1(A)$, и мы получаем включение $Z^1(A) \supseteq Z^2(A)$. Оно эквивалентно равенству $Z^1(A) = Z^2(A)$, которое в свою очередь влечет (1.78).

2. Рассмотрим теперь общий случай, когда B – произвольная C^* -алгебра. Тогда B вкладывается в некоторую алгебру $\mathcal{B}(H)$, и мы получаем цепочку

$$A \subseteq B \subseteq \mathcal{B}(H).$$

Пусть, как и раньше $Z^n(A)$ – последовательность подпространств в B , определенных равенствами (1.77), а $Z_H^n(A)$ – такая же последовательность в $\mathcal{B}(H)$ (то есть подпространства, определяемые равенствами (1.77), в которых B заменено на $\mathcal{B}(H)$). Покажем, что

$$Z^n(A) = B \cap Z_H^n(A), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.81)$$

Для $n = 0$ это верно по определению. Предположим, мы доказали это для всех индексов, не превышающих какого-то $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для $n + 1$ мы получим цепочку:

$$\begin{aligned} c \in B \cap Z_H^{n+1}(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} c \in B \\ \forall a \in A \quad [c, a] \in Z_H^n(A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \in B \\ \forall a \in A \quad [c, a] = c \cdot a - a \cdot c \in B \\ \forall a \in A \quad [c, a] \in Z_H^n(A) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall a \in A \quad [c, a] \in B \cap Z_H^n(A) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{предположение} \\ \text{индукции}}}{=} Z^n(A) \Leftrightarrow c \in Z^{n+1}(A). \end{aligned}$$

Для последовательности $Z_H^n(A)$ мы уже доказали равенства

$$Z_H^1(A) = Z_H^n(A), \quad n \geq 1.$$

Вместе с формулой (1.81) они влекут

$$Z^n(A) = B \cap Z_H^n(A) = B \cap Z_H^1(A) = Z^1(A).$$

□

Из теоремы 1.8 следует

Теорема 1.9. Если A – инволютивная стереотипная алгебра, а B – C^* -алгебра, то для всякого инволютивного гомоморфизма стереотипных алгебр $\varphi : A \rightarrow B$ последовательность подпространств $Z^n(\varphi)$ стабилизируется, начиная с номера 1:

$$Z^n(\varphi) = Z^{n+1}(\varphi), \quad n \geq 1. \quad (1.82)$$

Доказательство. Замкнутый образ $\overline{\varphi(A)}$ алгебры A при отображении φ является инволютивной подалгеброй в B , причем

$$Z^n(\varphi) = Z^n(\overline{\varphi(A)}).$$

Поэтому (1.82) является просто следствием (1.78).

□

(d) Касательное и кокасательное расслоения

Касательное и кокасательное пространства.

- *Комплексным касательным вектором* к инволютивной стереотипной алгебре A в точке $s \in \text{Spec}(A)$ называется всякий линейный непрерывный функционал $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющий условию:

$$\tau(a \cdot b) = s(a) \cdot \tau(b) + \tau(a) \cdot s(b), \quad a, b \in A \quad (1.83)$$

Множество всех комплексных касательных векторов к A в точке $s \in \text{Spec}(A)$ называется *комплексным касательным пространством* к A в точке $s \in \text{Spec}(A)$ и обозначается $\mathcal{C}T_s[A]$. Оно наделяется топологией, представляющей собой псевдонасыщение топологии равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в A (как следствие, $\mathcal{C}T_s[A]$ – стереотипное пространство и непосредственное подпространство в A^*).

Заметим, что касательный вектор всегда равен нулю на единице

$$\tau(1_A) = 0, \quad \tau \in \mathcal{C}T_s[A] \quad (1.84)$$

потому что

$$\tau(1_A) = \tau(1_A \cdot 1_A) = \underbrace{s(1_A)}_{\parallel 1} \cdot \tau(1_A) + \tau(1_A) \cdot \underbrace{s(1_A)}_{\parallel 1} = 2\tau(1_A).$$

- Формула

$$\tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)}, \quad a \in A. \quad (1.85)$$

задает инволюцию (в смысле (0.2)) на комплексном касательном пространстве $\mathbb{C}T_s[A]$.

- *Касательным вектором* (или *вещественным касательным вектором*) к инволютивной стереотипной алгебре A в точке $s \in \text{Spec}(A)$ называется всякий вещественный вектор (в смысле (0.3)) в пространстве $\mathbb{C}T_s[A]$ относительно инволюции (1.85), то есть комплексный касательный вектор $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющий условию

$$\tau(a^*) = \tau(a)^*, \quad a \in A. \quad (1.86)$$

Множество всех касательных векторов к A в точке $s \in \text{Spec}(A)$ называется *касательным пространством* к A в точке $s \in \text{Spec}(A)$ и обозначается $T_s[A]$. Оно наделяется топологией, представляющей собой псевдонасыщение топологии равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в A . Очевидно, $T_s[A]$ является вещественной частью пространства $\mathbb{C}T_s[A]$:

$$T_s[A] = \text{Re}(\mathbb{C}T_s[A]).$$

- *Комплексным кокасательным пространством* инволютивной стереотипной алгебры A в точке $s \in \text{Spec}(A)$ называется стереотипное фактор-пространство идеала $I_s[A]$ по подидеалу $\overline{I_s^2}[A]$:

$$\mathbb{C}T_s^*[A] := \left(I_s[A] / \overline{I_s^2}[A] \right)^\nabla. \quad (1.87)$$

Элементы этого пространства называются *комплексными кокасательными векторами* (алгебры A в точке $s \in \text{Spec}(A)$).

- Поскольку оба идеала $I_s[A]$ и $\overline{I_s^2}[A]$ замкнуты относительно инволюции, формула

$$(a + \overline{I_s^2}[A])^* = a^* + \overline{I_s^2}[A], \quad a \in I_s[A]$$

определяет некую инволюцию на фактор-пространстве $\mathbb{C}T_s^*[A] = \left(I_s[A] / \overline{I_s^2}[A] \right)^\nabla$ (как стереотипном A -бимодуле). Понятно, что это определение выбрано так, чтобы фактор-отображение $\pi : I_s \rightarrow (I_s / \overline{I_s^2})^\nabla$ переводило инволюцию в I_s , индуцированную из A , в определенную таким образом инволюцию на $(I_s / \overline{I_s^2})^\nabla$:

$$\pi(a^*) = \pi(a)^*.$$

- *Кокасательным вектором* (или *вещественным кокасательным вектором*) алгебры A в точке $s \in \text{Spec}(A)$ называется произвольный вещественный вектор (в смысле (0.3)) в пространстве $\mathbb{C}T_s^*[A]$, то есть произвольный комплексный кокасательный вектор $\xi \in \mathbb{C}T_s^*[A]$, инвариантный относительно инволюции $*$ в $\mathbb{C}T_s^*[A]$:

$$\xi^* = \xi. \quad (1.88)$$

Множество всех кокасательных векторов алгебры A в точке $s \in \text{Spec}(A)$ называется *кокасательным пространством* (алгебры A в точке $s \in \text{Spec}(A)$) и обозначается $T_s^*[A]$. Очевидно, $T_s^*[A]$ является вещественной частью $\mathbb{C}T_s^*[A]$:

$$T_s^*[A] = \text{Re} \mathbb{C}T_s^*[A].$$

Теорема 1.10. *Формула*

$$\tau(a) = (f \circ \pi)(a - s(a) \cdot 1_A), \quad a \in A, \quad (1.89)$$

устанавливает

- биекцию между комплексными касательными векторами $\tau \in T_s[A]$ к алгебре A в точке s и линейными над \mathbb{C} непрерывными функционалами $f : \mathbb{C}T_s^*[A] \rightarrow \mathbb{C}$ на комплексном кокасательном пространстве $\mathbb{C}T_s^*[A]$, причем эта биекция является изоморфизмом стереотипных пространств

$$\mathbb{C}T_s[A] \cong \mathbb{C}T_s^*[A]_\mathbb{C}^*, \quad (1.90)$$

- биекцию между касательными векторами $\tau \in T_s[A]$ к алгебре A в точке s и линейными над \mathbb{R} непрерывными функционалами $f : T_s^*[A] \rightarrow \mathbb{R}$, причем эта биекция является изоморфизмом стереотипных пространств

$$T_s[A] \cong T_s^*[A]_\mathbb{R}^*. \quad (1.91)$$

Доказательство. Для нас здесь важна вторая часть утверждения, поэтому мы докажем ее.

1. Покажем сначала, что для всякого функционала $f \in T_s^*[A]_{\mathbb{R}}^*$ формула (1.89) определяет некий касательный вектор $\tau \in T_s[A]$. Линейность, непрерывность и вещественность функционала τ очевидны, и нужно только проверить (1.83). Действительно, для любых $a, b \in A$ мы получим:

$$\begin{aligned} \tau(a \cdot b) - s(a) \cdot \tau(b) - \tau(a) \cdot s(b) &= (f \circ \pi)(a \cdot b - s(a \cdot b) \cdot 1_A) - s(a) \cdot (f \circ \pi)(b - s(b) \cdot 1_A) - (f \circ \pi)(a - s(a) \cdot 1_A) \cdot s(b) = \\ &= (f \circ \pi)(a \cdot b - s(a) \cdot b - a \cdot s(b) + s(a) \cdot s(b) \cdot 1_A) = (f \circ \pi)\left(\underbrace{(a - s(a) \cdot 1_A)}_{\cap I_s} \cdot \underbrace{(b - s(b) \cdot 1_A)}_{\cap I_s}\right) = 0 \end{aligned}$$

(потому что $\pi|_{I_s^2} = 0$).

2. Наоборот, если $\tau \in T_s[A]$, то для любых $a, b \in I_s$ мы получим

$$\tau(a \cdot b) = \underbrace{s(a) \cdot \tau(b)}_{\parallel 0} + \tau(a) \cdot \underbrace{s(b)}_{\parallel 0} = 0,$$

откуда $\tau|_{I_s^2} = 0$, и поэтому $\tau|_{I_s}$ пропускается через фактор-отображение $\pi : I_s \rightarrow (I_s/\overline{I_s^2})^\nabla$:

$$\tau|_{I_s} = f \circ \pi$$

для некоторого $f \in ((I_s/\overline{I_s^2})^\nabla)_{\mathbb{C}}^*$. То есть

$$\tau(x) = f(\pi(x)), \quad x \in I_s.$$

При этом, поскольку τ и π сохраняют инволюцию, причем π имеет плотный образ на области определения f , функционал f тоже должен сохранять инволюцию, и значит

$$f \in \operatorname{Re}((I_s/\overline{I_s^2})^\nabla)_{\mathbb{C}}^* = \operatorname{Re}(\mathbb{C}T_s^*[A])_{\mathbb{C}}^* = (0.13) = (\operatorname{Re} \mathbb{C}T_s^*[A])_{\mathbb{R}}^* = T_s^*[A]_{\mathbb{R}}^*.$$

Наконец, для всякого $a \in A$ мы получим

$$\tau(a) = \tau(a) - s(a) \cdot \underbrace{\tau(1_A)}_{\parallel 0} = \tau(\underbrace{a - s(a) \cdot 1_A}_{\cap I_s}) = f(\pi(a - s(a) \cdot 1_A)).$$

3. Теперь нужно убедиться, что отображение $\tau \mapsto f$ является гомеоморфизмом. Начнем с пространства $\mathbb{C}T_s[A]$ комплексных касательных векторов. Топология на $\mathbb{C}T_s[A]$ определяется как псевдонасыщение топологии равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в A , то есть топологии, порожденной полунормами

$$|\tau|_K = \sup_{a \in K} |\tau(a)|$$

где K пробегает систему всех вполне ограниченных множеств в A . Для всякого такого $K \subseteq A$ можно рассмотреть множество

$$T_K = \{a - s(a) \cdot 1_A; a \in K\},$$

которое, в отличие от K , лежит в идеале I_s . Но, как и K , множество T_K вполне ограничено в A , и значит и в I_s (если считать, что I_s наделено топологией непосредственного стереотипного подпространства в A). При этом значение полунормы $|\tau|_K$ равно значению полунормы $|\tau|_{T_K}$:

$$|\tau|_{T_K} = \sup_{x \in T_K} |\tau(x)| = \sup_{a \in K} |\tau(a - s(a) \cdot 1_A)| = \sup_{a \in K} |\tau(a)| = |\tau|_K$$

Отсюда можно заключить, что топология пространства $\mathbb{C}T_s[A]$ совпадает с псевдонасыщением топологии равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в I_s (а не просто в A). Вдобавок, всякий функционал $\tau \in \mathbb{C}T_s[A]$ однозначно определяется своим ограничением на идеал I_s . Поэтому $\mathbb{C}T_s[A]$ можно считать непосредственным подпространством в стереотипном пространстве I_s^* , двойственном к I_s :

$$\mathbb{C}T_s[A] \subseteq I_s^*.$$

При этом $\mathbb{C}T_s[A]$ аннулирует подпространство I_s^2 , а значит, и подпространство $\overline{I_s^2}$, поэтому $\mathbb{C}T_s[A]$ есть непосредственное подпространство в аннуляторе $\left(\overline{I_s^2}\right)^\perp$ пространства $\overline{I_s^2}$ с топологией непосредственного подпространства в I_s^* :

$$\mathbb{C}T_s[A] \subseteq \left(\overline{I_s^2}\right)^{\perp\Delta}.$$

В силу тождества [1, (4.5)], пространство в правой части этого равенства естественно изоморфно сопряженному пространству к стереотипному фактор-пространству $(I_s/\overline{I_s^2})^\nabla$:

$$\mathbb{C}T_s[A] \subseteq \left(\overline{I_s^2}\right)^{\perp\Delta} \cong \left((I_s/\overline{I_s^2})^\nabla\right)^* = \mathbb{C}T_s^*[A]_{\mathbb{C}}^*. \quad (1.92)$$

Получаемое в результате вложение $\mathbb{C}T_s[A] \rightarrow (I_s/\overline{I_s^2})^\nabla$ представляет собой как раз отображение $\tau \mapsto f$, определяемое формулой (1.89). Поскольку, как мы уже поняли, эта формула задает биекцию, мы получаем, что вложение в цепочке (1.92) должно быть равенством, причем равенством стереотипных пространств (поскольку $\mathbb{C}T_s[A]$ – непосредственное подпространство в $\left(\overline{I_s^2}\right)^{\perp\Delta}$):

$$\mathbb{C}T_s[A] = \left(\overline{I_s^2}\right)^{\perp\Delta} \cong \left((I_s/\overline{I_s^2})^\nabla\right)^* = \mathbb{C}T_s^*[A]_{\mathbb{C}}^*.$$

Теперь переходя к вещественной части, мы получаем:

$$T_s[A] = \operatorname{Re} \mathbb{C}T_s[A] = \operatorname{Re} \left(\mathbb{C}T_s^*[A]_{\mathbb{C}}^*\right) = (0.13) = \left(\operatorname{Re} \mathbb{C}T_s^*[A]\right)_{\mathbb{R}}^* = \left(T_s^*[A]\right)_{\mathbb{R}}^*.$$

□

Предложение 1.7. Для всякого гомоморфизма инволютивных стереотипных алгебр $\varphi : A \rightarrow B$ и любой точки $t \in \operatorname{Spec}(B)$ формула

$$\varphi_t^*(\tau)(a) = \tau(\varphi(a)), \quad \tau \in T_t(B) \quad (1.93)$$

определяет линейное непрерывное отображение касательных пространств $\varphi_t^* : T_{t \circ \varphi}[A] \leftarrow T_t[B]$.

Пример 1.1. Существует мономорфизм инволютивных стереотипных алгебр $\varphi : A \rightarrow B$, при котором отображение касательных пространств $\varphi_t^* : T_{t \circ \varphi}[A] \leftarrow T_t[B]$ не является эпиморфизмом для некоторого $t \in \operatorname{Spec}(B)$.

Доказательство. Таким мономорфизмом будет естественное вложение функциональных алгебр $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Для любой точки $t \in \mathbb{R}$ соответствующее отображение касательных пространств

$$\varphi_t^* : T_t[\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})] \cong \mathbb{R} \leftarrow 0 \cong T_t[\mathcal{C}(\mathbb{R})],$$

конечно, не может быть эпиморфизмом (то есть в данном случае сюръекцией). □

Кокасательное расслоение $T^*[A]$. Заметим, что всякая непрерывная полунорма $p : I_t \rightarrow \mathbb{R}_+$ определяет полунорму p^\bullet на фактор-пространстве $\mathbb{C}T_t^*(X) = (I_t/\overline{I_t^2})^\nabla$ по формуле

$$p^\bullet(x + \overline{I_t^2}) := \inf_{y \in \overline{I_t^2} \cdot X} p(x + y), \quad x \in X. \quad (1.94)$$

Рассмотрим теперь прямую сумму множеств $\mathbb{C}T_t^*(A)$

$$\mathbb{C}T^*(A) = \bigsqcup_{t \in \operatorname{Spec}(A)} \mathbb{C}T_t^*(A) = \bigsqcup_{t \in \operatorname{Spec}(A)} \left(I_t/\overline{I_t^2}\right)^\nabla$$

и обозначим через π естественную проекцию $\mathbb{C}T^*(X)$ на $\operatorname{Spec}(A)$:

$$\pi : J_A^n(X) \rightarrow \operatorname{Spec}(A), \quad \pi\left(x + \overline{I_t^2} \cdot X\right) = t, \quad t \in \operatorname{Spec}(A), \quad x \in X.$$

Кроме того, для всякого вектора $x \in A$ мы рассмотрим отображение

$$T^*(x) : \operatorname{Spec}(A) \rightarrow \mathbb{C}T^*(X) \quad \Bigg| \quad T^*(x)(t) = x - t(x) \cdot 1_A + \overline{I_t^2}.$$

Понятно, что для всякого $x \in A$

$$\pi \circ T^*(x) = \operatorname{id}_{\operatorname{Spec}(A)}.$$

Лемма 1.6. Для всякого элемента $x \in A$ и любой непрерывной полунормы $p : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ отображение $t \in \text{Спец}(A) \mapsto p^\bullet(T^*(x)(t)) \in \mathbb{R}_+$ полунепрерывно сверху.

Доказательство. Пусть $t \in \text{Спец}(A)$ и $\varepsilon > 0$. Условие

$$p^\bullet(T^*(x)(t)) = p_t^n(x - t(x) \cdot 1_A + \overline{I_t^2}) = \inf_{y \in \overline{I_t^2}} p(x - t(x) \cdot 1_A + y) = \inf_{y \in I_t^2} p(x - t(x) \cdot 1_A + y) < \varepsilon$$

означает, что для некоторого $y \in I_t^2$ выполняется неравенство

$$p(x - t(x) \cdot 1_A + y) < \varepsilon.$$

Это в свою очередь означает, что существует число $m \in \mathbb{N}$ и векторы $a^1, \dots, a^m, b^1, \dots, b^m \in I_t$ такие, что

$$p\left(x - t(x) \cdot 1_A + \sum_{k=1}^m a^k \cdot b^k\right) < \varepsilon. \quad (1.95)$$

Для любых чисел

$$\lambda \in \mathbb{C}, \quad \alpha = \{\alpha^k; 1 \leq k \leq m\} \subseteq \mathbb{C}, \beta = \{\beta^k; 1 \leq k \leq m\} \subseteq \mathbb{C}$$

обозначим

$$f(\lambda, \alpha, \beta) = p\left(x - \lambda \cdot 1_A + \sum_{k=1}^m (a^k - \alpha^k \cdot 1_A) \cdot (b^k - \beta^k \cdot 1_A)\right).$$

Функция $(\lambda, \alpha, \beta) \mapsto f(\lambda, \alpha, \beta)$ в точке $(\lambda, \alpha, \beta) = (t(x), 0, 0)$ совпадает с левой частью (1.95) и поэтому удовлетворяет неравенству

$$f(t(x), 0, 0) < \varepsilon.$$

С другой стороны, она непрерывна, как композиция многочлена от $2m + 1$ комплексных переменных со значениями в локально выпуклом пространстве X и непрерывной функции p на X . Значит, должно существовать число $\delta > 0$ такое, что

$$\forall \lambda, \alpha, \beta \quad |\lambda - t(x)| < \delta \quad \& \quad \max_k |\alpha^k| < \delta \quad \& \quad \max_k |\beta^k| < \delta \quad \implies \quad f(\lambda, \alpha, \beta) < \varepsilon. \quad (1.96)$$

Рассмотрим далее множество

$$U = \{s \in \text{Спец}(A) : |s(x) - t(x)| < \delta \quad \& \quad \max_k |s(a^k)| < \delta \quad \& \quad \max_k |s(b^k)| < \delta\}.$$

Оно открыто и содержит точку t (потому что $|t(x) - t(x)| = 0 < \delta$, и включения $a^k, b^k \in I_t$ означают систему равенств $t(a^k) = t(b^k) = 0$, $1 \leq k \leq m$). С другой стороны, для всякой точки $s \in U$, рассмотрев числа

$$\lambda = s(x), \quad \alpha^k = s(a^k), \quad \beta^k = s(b^k),$$

мы получим, во-первых, $s(a^k - \alpha^k \cdot 1_A) = s(a^k) - \alpha^k \cdot s(1_A) = s(a^k) - s(a^k) = 0$, то есть

$$a^k - \alpha^k \cdot 1_A \in I_s$$

во-вторых, по тем же причинам,

$$b^k - \beta^k \cdot 1_A \in I_s$$

и, в-третьих,

$$|\lambda - t(x)| < \delta, \quad \max_k |\alpha^k| = \max_k |s(a^k)| < \delta, \quad \max_k |\beta^k| = \max_k |s(b^k)| < \delta,$$

то есть, в силу (1.96),

$$p\left(x - \lambda \cdot 1_A + \sum_{k=1}^m \underbrace{(a^k - \alpha^k \cdot 1_A)}_{I_s} \cdot \underbrace{(b^k - \beta^k \cdot 1_A)}_{I_s}\right) = f(\lambda, \alpha, \beta) < \varepsilon$$

Это можно понимать так, что для некоторой точки $z \in I_s^2$ выполняется неравенство

$$p(x - s(x) \cdot 1_A + z) < \varepsilon,$$

которое, в свою очередь, влечет за собой неравенство

$$p_s(T^*(x)(s)) = p_s(x - s(x) \cdot 1_A + \overline{I_s^2}) = \inf_{z \in \overline{I_s^2}} p(x - s(x) \cdot 1_A + z) = \inf_{z \in I_s^2} p(x - s(x) \cdot 1_A + z) < \varepsilon$$

Оно верно для всякой точки s из окрестности U точки t , и как раз это нам и нужно было доказать. \square

В следующей теореме мы описываем топологию на кокасательном расслоении $T^*(A) = \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} T_t^*(A)$, однако точно теми же рассуждениями вводится топология на комплексном касательном расслоении $\mathbb{C}T^*(A) = \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} \mathbb{C}T_t^*(A)$.

Теорема 1.11. *Для всякой инволютивной стереотипной алгебры A прямая сумма стереотипных фактор-модулей*

$$T^*(A) = \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} T_t^*(A) = \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} \text{Re} \left(I_t / \overline{I_t^2} \right)^\nabla$$

обладает единственной топологией, превращающей проекцию

$$\pi : T^*(A) \rightarrow \text{Spec}(A), \quad \pi(x + \overline{I_t^2}) = t, \quad t \in \text{Spec}(A), \quad x \in A$$

в локально выпуклое расслоение с системой полунорм $\{p^\bullet; p \in \mathcal{P}(A)\}$, для которого отображение

$$x \in A \mapsto T^*(x) \in \text{Sec}(\pi) \quad \Bigg| \quad T^*(x)(t) = x + \overline{I_t^2}, \quad t \in \text{Spec}(A),$$

непрерывно переводит A в стереотипное пространство $\text{Sec}(\pi)$ непрерывных сечений π . При этом базу топологии $T^(A)$ образуют множества*

$$W(x, U, p, \varepsilon) = \left\{ \xi \in T^*(A) : \pi(\xi) \in U \ \& \ p_{\pi(\xi)}(\xi - T^*(x)(\pi(\xi))) < \varepsilon \right\}$$

где $x \in A$, $p \in \mathcal{P}(A)$, $\varepsilon > 0$, U – открытое множество в M ;

- Расслоение $\pi : T^*(A) \rightarrow \text{Spec}(A)$ называется *кокасательным расслоением* алгебры A .

Доказательство. Из леммы 1.6 и предложения 1.2 следует существование и единственность топологии на $T^*(A)$, для которой проекция $\pi : T^*(A) \rightarrow \text{Spec}(A)$ представляет собой локально выпуклое расслоение с полунормами p^\bullet , а сечения вида $T^*(x)$, $x \in X$, будут непрерывными. Непрерывность отображения $x \in A \mapsto T^*(x) \in \text{Sec}(\pi)$ доказывается импликацией

$$p^\bullet(\pi(x)(t)) = \inf_{y \in \overline{I_t^2}} p(x + y) \leq p(x) \implies \sup_{t \in T} p^\bullet(\pi^n(x)(t)) \leq p(x)$$

для всякого компакта $T \subseteq M$. Структура базы топологии в $T^*(A)$ также следует из предложения 1.2. \square

Касательное расслоение $T[A]$. Пусть $\varphi : A \rightarrow B$ – гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр. Линейное (над \mathbb{C}) непрерывное отображение $D : A \rightarrow B$ называется *дифференцированием* из A в B относительно φ , если справедливо тождество

$$D(x^*) = D(x)^*, \quad D(x \cdot y) = D(x) \cdot \varphi(y) + \varphi(x) \cdot D(y), \quad x, y \in A. \quad (1.97)$$

Множество всех дифференцирований из A в B относительно φ мы обозначаем $\text{Der}_\varphi(A, B)$. В частном случае, если $A = B$ и $\varphi = \text{id}_A$, принято говорить просто о дифференцированиях в A , и при этом используется обозначение

$$\text{Der}(A) := \text{Der}_{\text{id}_A}(A, A).$$

Пространства $\text{Der}_\varphi(A, B)$ и $\text{Der}(A)$ наделяются топологиями непосредственных подпространств в пространствах операторов $\text{Mor}(A, B)$ и $\text{Mor}(A, A)$.

Теорема 1.12. *Если множество значений дифференцирования $D : A \rightarrow B$ лежит в центре алгебры B ,*

$$D(A) \subseteq Z(B), \quad (1.98)$$

то D является дифференциальным оператором порядка 1. Как следствие, в этом случае D определяет некий морфизм расслоений струй $j_1[D] : J_A^1(A) \rightarrow J_A^0(B)$, удовлетворяющий тождеству

$$j^0(Dx) = j_1[D] \circ j^1(x), \quad x \in A. \quad (1.99)$$

Доказательство. Из тождества (1.97) следует

$$[D, a](x) = D(a \cdot x) - a \cdot D(x) = D(a) \cdot x + a \cdot D(x) - a \cdot D(x) = D(a) \cdot x,$$

из которого, в свою очередь,

$$[[D, a], b](x) = [D, a](b \cdot x) - b \cdot [D, a](x) = D(a) \cdot b \cdot x - b \cdot D(a) \cdot x = (1.98) = 0.$$

То есть D является дифференциальным оператором порядка 1. После этого применяется теорема 1.6. \square

Теорема 1.13. *Всякое дифференцирование $D : A \rightarrow A$ алгебры A в каждой точке спектра $t \in \text{Spec}(A)$ определяет касательный вектор по формуле*

$$D^T(t)(x) = t(D(x)), \quad x \in A.$$

Доказательство. Действительно,

$$D^T(t)(a \cdot b) = t(D(a \cdot b)) = t(Da \cdot b + a \cdot Db) = t(Da) \cdot t(b) + t(a) \cdot t(Db) = D^T(t)(a) \cdot t(b) + t(a) \cdot D^T(t)(b).$$

□

Из предложения 1.3 следует

Теорема 1.14. *Пусть \mathcal{U} инволютивной стереотипной алгебры A спектр $\text{Spec}(A)$ является хаусдорфовым пространством, а множество $\text{Der}(A)$ дифференцирований имеет плотный след в каждом касательном пространстве:*

$$\overline{\{D_t; D \in \text{Der}(A)\}} = T_t[A].$$

Тогда прямая сумма стереотипных пространств

$$T[A] = \bigsqcup_{t \in \text{Spec}(A)} T_t[A]$$

обладает топологией, превращающей проекцию

$$T_A : T[A] \rightarrow \text{Spec}(A), \quad T_A(\tau) = t, \quad \tau \in T_t[A]$$

в сопряженное расслоение к кокасательному расслоению $T^[A]$. При этом отображение*

$$D \in \text{Der}(A) \mapsto D^T \in \text{Sec}(T[A]) \quad \Bigg| \quad D^T(s)(a) = s(Da), \quad a \in A, \quad s \in \text{Spec}(A),$$

непрерывно переводит $\text{Der}(A)$ в стереотипное пространство $\text{Sec}(T[A])$ непрерывных сечений расслоения $T[A]$.

- Расслоение $T_A : T[A] \rightarrow \text{Spec}(A)$ называется *касательным расслоением* инволютивной стереотипной алгебры A .

Теорема Нахбина. Пусть $C^\infty(M)$ – алгебра комплекснозначных гладких функций на гладком многообразии M , наделенная обычной топологией равномерной сходимости на компактах по каждой производной. Следующий вариант теоремы Нахбина о подалгебрах в алгебре $C^\infty(M)$ ([18], см. также монографию [16]) играет в дифференциальной геометрии ту же роль, какую теорема Стоуна-Вейерштрасса играет в топологии.

Теорема 1.15. *Пусть A – инволютивная стереотипная подалгебра в алгебре $C^\infty(M)$ гладких функций на многообразии M . Для того, чтобы алгебра A была плотна в $C^\infty(M)$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

(i) *A разделяет точки M :*

$$\forall s \neq t \in M \quad \exists a \in A \quad a(s) \neq a(t),$$

(ii) *для всякой точки $s \in M$ и любого ненулевого касательного вектора $\tau \in T_s(M)$ найдется элемент $a \in A$, на котором вектор τ не равен нулю:*

$$\forall \tau \in T_s(M) \setminus \{0\} \quad \exists a \in A \quad \tau(a) \neq 0,$$

§ 2 C^∞ -алгебры и C^∞ -оболочки

(а) Алгебры степенных рядов с коэффициентами в C^* -алгебрах

Пусть $m \in \mathbb{N}$ – натуральное число³. Условимся *мультииндексом* длины m называть произвольную конечную последовательность длины m натуральных чисел

$$k = (k_1, \dots, k_m), \quad k_i \in \mathbb{N}.$$

³Всюду под натуральными числами \mathbb{N} мы понимаем целые неотрицательные числа: $\mathbb{N} = \{m \in \mathbb{Z} : m \geq 0\}$.

Для двух мультииндексов $k, l \in \mathbb{N}^m$ неравенство $l \leq k$ определяется по координатам:

$$l \leq k \iff \forall i = 1, \dots, m \quad l_i \leq k_i.$$

Суммой двух мультииндексов $k, l \in \mathbb{N}^m$ мы будем называть мультииндекс

$$k + l = (k_1 + l_1, \dots, k_m + l_m).$$

Если же $l \leq k$, то их разность определяется равенством

$$k - l = (k_1 - l_1, \dots, k_m - l_m).$$

Кроме того, модуль и факториал мультииндекса $k \in \mathbb{N}^m$ определяются равенствами

$$|k| = k_1 + \dots + k_m, \quad k! = k_1! \cdot \dots \cdot k_m!.$$

В соответствии с последней формулой, биномиальный коэффициент представляет собой число

$$\binom{k}{l} = \frac{k!}{l! \cdot (k - l)!}$$

Пусть далее B – произвольная C^* -алгебра. Рассмотрим алгебру

$$B[[m]] = B^{\mathbb{N}^m},$$

состоящую из всевозможных отображений $x : \mathbb{N}^m \rightarrow B$, или, что то же самое, семейств $x = \{x_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ элементов из B , индексированных мультииндексами длины m . На $B[[m]]$ задается топология по координатной сходимости

$$x \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{B[[m]]} x \iff \forall k \in \mathbb{N}^m \quad x_k \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{B[[m]]} x_k,$$

а алгебраические операции в $B[[m]]$ – инволюция, сумма, умножение на скаляр и произведение – определяются формулами

$$(x^*)_k = (x_k)^*, \quad x \in B[[m]], \quad k \in \mathbb{N}^m \quad (2.1)$$

$$(x + y)_k = x_k + y_k, \quad x, y \in B[[m]], \quad k \in \mathbb{N}^m \quad (2.2)$$

$$(\lambda \cdot x)_k = \lambda \cdot x_k, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in B[[m]], \quad k \in \mathbb{N}^m \quad (2.3)$$

$$(x \cdot y)_k = \sum_{0 \leq l \leq k} x_{k-l} \cdot y_l, \quad x, y \in B[[m]], \quad k \in \mathbb{N}^m \quad (2.4)$$

Единицей в $B[[m]]$ будет, как легко понять, семейство

$$1_{B[[m]]} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Элементы $B[[m]]$ удобно представлять себе как степенные ряды от m независимых переменных τ_1, \dots, τ_m :

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} x_k \cdot \tau^k,$$

где под τ^k понимается формальное произведение

$$\tau^k = \tau^{k_1} \cdot \dots \cdot \tau^{k_m},$$

удовлетворяющее тождеству

$$\tau^k \cdot \tau^l = \tau^{k+l}.$$

Тогда сумма, умножение на скаляр и произведение в $B[[m]]$ описываются формулами для степенных рядов:

$$x + y = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} (x_k + y_k) \cdot \tau^k, \quad \lambda \cdot x = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} (\lambda \cdot x_k) \cdot \tau^k, \quad x \cdot y = \sum_{k \in \mathbb{N}^m} \left(\sum_{0 \leq l \leq k} x_{k-l} \cdot y_l \right) \cdot \tau^k.$$

Системы частных производных и морфизмы со значениями в алгебрах степенных рядов.

Пусть A – инволютивная стереотипная алгебра, а B – C^* -алгебра. Система операторов $D_k : A \rightarrow B$, $k \in \mathbb{N}^m$, называется *системой частных производных* из A в B размерности $m \in \mathbb{N}$, если она удовлетворяет условиям:

$$D_k(a^*) = D_k(a)^*, \quad k \in \mathbb{N}^m, \quad (2.6)$$

$$D_k(1) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}^m, \quad 1 \in A, \quad (2.7)$$

$$D_k(a \cdot b) = \sum_{0 \leq l \leq k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l(b), \quad k \in \mathbb{N}^m, \quad a, b \in A. \quad (2.8)$$

В частности, это означает, что оператор $D_0 : A \rightarrow B$ должен быть инволютивным гомоморфизмом алгебр,

$$D_0(a^*) = D_0(a)^*, \quad D_0(1) = 1, \quad D_0(a \cdot b) = D_0(a) \cdot D_0(b), \quad a, b \in A.$$

А в случае $|k| = 1$ операторы $D_k : A \rightarrow B$ должны быть дифференцированиями относительно гомоморфизма D_0 :

$$D_k(a \cdot b) = D_k(a) \cdot D_0(b) + D_0(a) \cdot D_k(b), \quad a, b \in A.$$

Теорема 2.1. Для любой инволютивной стереотипной алгебры A и любой C^* -алгебры B формула

$$D(a)_k = D_k(a), \quad k \in \mathbb{N}^m, \quad a \in A \quad (2.9)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами инволютивных стереотипных алгебр $D : A \rightarrow B[[m]]$ и системами частных производных $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ из A в B .

Доказательство. 1. Если $D : A \rightarrow B[[m]]$ – гомоморфизм алгебр, то определив отображения $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\} : A \rightarrow B$ по формуле (2.9), мы получим, во-первых, для любого $a \in A$

$$D_k(a^*) = D(a^*)_k = (D(a)^*)_k = (2.1) = (D(a)_k)^* = (D_k(a))^*,$$

во-вторых,

$$D_k(1) = D(1)_k = 1_k = (2.41) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases},$$

и, в-третьих, для любых $a, b \in A$

$$D_k(a \cdot b) = (2.9) = D(a \cdot b)_k = (D(a) \cdot D(b))_k = (2.4) = \sum_{0 \leq l \leq k} D(a)_{k-l} \cdot D(b)_l = (2.9) = \sum_{0 \leq l \leq k} D_{k-l}(a) \cdot D_l(b).$$

То есть выполняются тождества (2.7) и (2.8), и это значит, что семейство $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ есть система частных производных из A в B .

2. Наоборот, если $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ – система частных производных из A в B , то, определив отображение $D : A \rightarrow B[[m]]$ формулой (2.9), мы получим, во-первых, для любого $a \in A$

$$D(a^*)_k = D_k(a^*) = (2.6) = D_k(a)^* = (D(a)_k)^*,$$

во-вторых,

$$D(1)_k = D_k(1) = (2.7) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} = (2.41) = 1_k \quad \implies \quad D(1) = 1,$$

и, в-третьих, для любых $a, b \in A$

$$\begin{aligned} D(a \cdot b)_k &= (2.9) = D_k(a \cdot b) = (2.8) = \sum_{0 \leq l \leq k} D_{k-l}(a) \cdot D_l(b) = (2.9) = \\ &= \sum_{0 \leq l \leq k} D(a)_{k-l} \cdot D(b)_l = (2.4) = (D(a) \cdot D(b))_k \quad \implies \quad D(a \cdot b) = D(a) \cdot D(b). \end{aligned}$$

То есть $D : A \rightarrow B[[m]]$ является инволютивным гомоморфизмом. \square

Пример 2.1. Пусть M – гладкое многообразие размерности m , $\varphi : U \rightarrow V$ – локальная карта, где $U \subseteq M$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ и $K \subseteq U$ – компакт. Тогда система операторов

$$D_k : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}(K) \quad \Bigg| \quad D_k(a) = \frac{\partial^{|k|}(a \circ \varphi^{-1})}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_m^{k_m}} \circ \varphi$$

является системой частных производных на $\mathcal{C}^\infty(M)$. Соответствующий ей гомоморфизм алгебр $D : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}(K)[[m]]$ представляет собой систему ограничений на компакт K частных производных данной функции:

$$(D(a))_k = D_k(a)|_K$$

Частные производные как дифференциальные операторы. Пусть, по-прежнему, A – стереотипная алгебра с инволюцией, а B – C^* -алгебра, и $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ – система частных производных из A в B . Тогда гомоморфизм $\varphi = D_0 : A \rightarrow B$ превращает B в модуль над A , и поэтому для всякого оператора $P : A \rightarrow B$ и любого элемента $a \in A$ определен коммутатор $[P, a] : A \rightarrow B$.

Предложение 2.1. Для всякой системы частных производных $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ из A в B коммутатор операторов D_k с произвольным элементом $a \in A$ относительно гомоморфизма $D_0 : A \rightarrow B$ действует по формуле

$$[D_k, a] = \sum_{0 \leq l < k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l \quad (2.10)$$

причем, при $k = 0$ эта формула приобретает вид

$$[D_0, a] = 0. \quad (2.11)$$

Доказательство. Тождество (2.11) выполняется тривиально, поскольку D_0 – гомоморфизм. А (2.10) доказывается цепочкой

$$[D_k, a](x) = D_k(a \cdot x) - \varphi(a) \cdot D_k(x) = \sum_{0 \leq l \leq k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l(x) - D_0(a) \cdot D_k(x) = \sum_{0 \leq l < k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l(x).$$

□

Теорема 2.2. Для любой системы частных производных $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ из инволютивной стереотипной алгебры A в C^* -алгебру B следующие условия эквивалентны:

- (i) операторы $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ являются дифференциальными операторами из A в B относительно гомоморфизма $D_0 : A \rightarrow B$ с порядками, не превосходящими модулей своих индексов:

$$D_k \in \text{Diff}^{|k|}(D_0), \quad (2.12)$$

- (ii) для любого мультииндекса $k > 0$ значения оператора D_k лежат в пространстве $Z^{|k|}(D_0)$:

$$D_k(A) \subseteq Z^{|k|}(D_0), \quad k > 0. \quad (2.13)$$

- (iii) для любого мультииндекса $k > 0$ значения оператора D_k лежат в пространстве $Z^1(D_0)$:

$$D_k(A) \subseteq Z^1(D_0), \quad k > 0. \quad (2.14)$$

- Систему частных производных $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ из A в B мы будем называть *дифференциальной*, если она удовлетворяет эквивалентным условиям (i)–(iii) теоремы 2.2. В этом случае гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр $D : A \rightarrow B[[m]]$, определяемый системой $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ по формуле (2.9), также называется *дифференциальным*.

Доказательство. Заметим сразу, что равносильность (ii) и (iii) есть следствие формулы (1.82). Поэтому нужно проверить равносильность (i) и (ii).

1. (i) \implies (ii). Пусть выполнено (i). Мы докажем (ii) по индукции.

- 1) Пусть $|k| = 1$. Тогда для любых $a, a_1 \in A$ мы получим:

$$[D_k, a] = (2.10) = \sum_{0 \leq l < k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l = D_k(a) \cdot D_0$$

$$\Downarrow$$

$$0 = [[D_k, a], a_1] = (1.62) = D_k(a) \cdot \underbrace{[D_0, a_1]}_{\substack{\parallel (2.11) \\ 0}} + [D_k(a), D_0(a_1)] \cdot D_0$$

$$\Downarrow$$

$$[D_k(a), D_0(a_1)] = 0$$

Последнее верно для любого a_1 , поэтому $D_k(a) \in Z^1(D_0)$. Это в свою очередь верно для любого $a \in A$, поэтому $D_k(A) \in Z^1(D_0)$.

2) Предположим, что мы уже доказали (2.13) для всех k таких, что $|k| \leq n$:

$$D_k(A) \subseteq Z^{|k|}(D_0), \quad 0 < |k| \leq n. \quad (2.15)$$

Тогда для $|k| = n + 1$ мы получим: при любом $a \in A$

$$\begin{aligned} \underbrace{[D_k, a]}_{\substack{\cap (1.50) \\ \text{Diff}^{|k|-1} \\ \parallel \\ \text{Diff}^n}} &= (2.10) = \sum_{0 \leq l < k} \binom{k}{l} \cdot D_{k-l}(a) \cdot D_l = D_k(a) \cdot D_0 + \sum_{0 < l < k} \binom{k}{l} \cdot \underbrace{D_{k-l}(a)}_{\substack{\text{Z}^{|k-l|} \\ (2.15) \cap \psi \\ \text{Diff}^{|k-l|+|l|-1} \\ \cap (1.72) \\ \parallel \\ \text{Diff}^n}} \cdot \underbrace{D_l}_{\substack{\text{Diff}^{|l|} \\ \psi (2.12)}} \\ &\Downarrow \\ &D_k(a) \cdot D_0 \in \text{Diff}^n \\ &\Downarrow \quad (1.75) \\ &D_k(a) \in Z^{n+1} = Z^{|k|} \end{aligned}$$

2. (i) \Leftarrow (ii). Пусть наоборот, выполнено (ii), тогда (i) доказывается также по индукции.

0) Для $k = 0$ утверждение (2.12) выполняется вообще всегда, потому что гомоморфизм $\varphi = D_0$ является дифференциальным оператором нулевого порядка в силу формулы (1.61).

1) Предположим, что мы доказали (2.12) для всех k таких, что $|k| \leq n$:

$$D_k \in \text{Diff}^{|k|}(D_0), \quad |k| \leq n. \quad (2.16)$$

Тогда для $|k| = n + 1$ мы получим:

$$\begin{aligned} \forall a \in A \quad [D_k, a] &= (2.10) = \sum_{0 \leq l < k} \binom{k}{l} \cdot \underbrace{D_{k-l}(a)}_{\substack{\text{Z}^{|k-l|} \\ (2.13) \cap \psi \\ \text{Diff}^{|k-l|+|l|-1} \\ \cap (1.72) \\ \parallel \\ \text{Diff}^n}} \cdot \underbrace{D_l}_{\substack{\text{Diff}^{|l|} \\ \psi (2.16)}} \\ &\Downarrow \\ \forall a \in A \quad [D_k, a] &\in \text{Diff}^n, \\ &\Downarrow \\ D_k &\in \text{Diff}^{n+1}. \end{aligned}$$

□

(b) C^∞ -оболочки.

C^∞ -оболочки. C^∞ -расширением и C^∞ -оболочкой алгебры A мы условимся называть расширение и оболочку A (в смысле общего категориного определения [3]) в классе DEr_1 плотных эпиморфизмов категории Ste^\otimes стереотипных алгебр относительно класса дифференциальных инволютивных гомоморфизмов с коэффициентами в C^* -алгебрах (определенных на с.44).

Иными словами, под C^∞ -оболочкой инволютивной топологической алгебры A мы понимаем плотный гомоморфизм $\sigma : A \rightarrow A'$ инволютивных топологических алгебр такой, что для любой C^* -алгебры B , любого числа $m \in \mathbb{N}$ и любого дифференциального инволютивного гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B[[m]]$ в

алгебру степенных рядов с коэффициентами в B найдется единственный гомоморфизм C^* -алгебр $\varphi' : A' \rightarrow B$, замыкающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & A' \\ & \searrow \varphi & \swarrow \varphi' \\ & B & \end{array}$$

А C^∞ -оболочка инволютивной топологической алгебры A определяется как C^∞ -расширение $\rho : A \rightarrow A^\infty$ такое, что для любого C^∞ -расширения $\sigma : A \rightarrow A'$ найдется единственный гомоморфизм инволютивных алгебр $\nu : A' \rightarrow A^\infty$, замыкающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \rho \\ A' & \xrightarrow{\nu} & A^\infty \end{array}$$

Теорема 2.3. Пусть A – инволютивная стереотипная подалгебра в алгебре $C^\infty(M)$ гладких функций на гладком многообразии M . Для того, чтобы C^∞ -оболочка алгебры A совпадала с алгеброй $C^\infty(M)$

$$\text{Env}_{C^\infty} A = C^\infty(M)$$

достаточно выполнение следующих условий:

(i) спектр A совпадает с M :

$$\text{Spec}(A) = M;$$

(ii) для всякой точки $s \in M$ естественное отображение касательных пространств

$$T_s[A] \leftarrow T_s(M)$$

является изоморфизмом (векторных пространств),

При этом условие (ii) в этом списке эквивалентно любому из следующих двух условий:

(iii) для всякой точки $s \in M$ естественное отображение кокасательных пространств

$$T_s^*[A] \rightarrow T_s^*(M)$$

является изоморфизмом (векторных пространств),

(iv) для всякой точки $s \in M$ и любого числа $n \in \mathbb{N}$ естественное отображение пространств струй

$$J_s^n[A] \rightarrow J_s^n(M)$$

является изоморфизмом (стереотипных пространств).

Для доказательства нам понадобится

Лемма 2.1. Пусть $\rho : A \rightarrow B$ – гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр, и для точки $t \in \text{Spec}(B)$ соответствующий морфизм кокасательных пространств $\rho_t^{\text{CT}^*} : \mathbb{C}T_{t \circ \rho}^*[A] \rightarrow \mathbb{C}T_t^*[B]$ инъективен:

$$\text{Ker } \rho_t^{\text{CT}^*} = 0 \quad (2.17)$$

Тогда

$$\overline{I_{t \circ \rho}^2[A]} = \rho^{-1}(\overline{I_t^2[B]}). \quad (2.18)$$

Доказательство. Здесь прямое вложение следует сразу из гомоморфности (и непрерывности) ρ (мы пользуемся обозначениями на с.6):

$$\begin{aligned} \rho(I_{t \circ \rho}[A]) &\subseteq I_t[B] \implies \\ \implies \rho(I_{t \circ \rho}^2[A]) &= \rho(I_{t \circ \rho}[A] \cdot I_{t \circ \rho}[A]) = \rho(I_{t \circ \rho}[A]) \cdot \rho(I_{t \circ \rho}[A]) \subseteq I_s[B] \cdot I_s[B] = I_s^2[B] \subseteq \overline{I_t^2[B]} \implies \\ \implies I_{t \circ \rho}^2[A] &\subseteq \rho^{-1}(\overline{I_t^2[B]}) \implies \overline{I_{t \circ \rho}^2[A]} \subseteq \rho^{-1}(\overline{I_t^2[B]}). \end{aligned}$$

Полученное вложение можно переписать в виде

$$\rho(\overline{I_{t \circ \rho}^2[A]}) \subseteq \overline{I_t^2[B]},$$

и мы можем сделать вывод, что справедлива диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \overline{I_{t \circ \rho}^2[A]} & \xrightarrow{\rho} & \overline{I_t^2[B]} \\ \sigma_A \downarrow & & \downarrow \sigma_B \\ I_{t \circ \rho}[A] & \xrightarrow{\rho} & I_t[B] \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ \mathbb{C}T_{t \circ \rho}[A] & \xlongequal{\quad} \left(I_{t \circ \rho}[A] / \overline{I_{t \circ \rho}^2[A]} \right)^\nabla \xrightarrow{\rho_t^{T^*}} \left(I_t[B] / \overline{I_t^2[B]} \right)^\nabla \xlongequal{\quad} \mathbb{C}T_t[B] \end{array}$$

Из нее следует обратная цепочка, необходимая для доказательства (2.18):

$$\begin{aligned} a \in \rho^{-1}(\overline{I_t^2[B]}) &\implies \rho(a) \in \overline{I_t^2[B]} \implies \rho_t^{T^*}(\pi_A(a)) = \pi_B(\rho(a)) = 0 \implies \\ &\implies \pi_A(a) \in \text{Ker } \rho_t^{T^*} = (2.17) = 0 \implies a \in \text{Ker}(\pi_A) = I_{t \circ \rho}[A]. \end{aligned}$$

□

Доказательство теоремы 2.3. С самого начала обозначим через $\rho : A \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ естественное вложение A в $\mathcal{C}^\infty(M)$.

1. Покажем сначала, что условия (ii)-(iv) эквивалентны. Эквивалентность (ii) и (iii) следует сразу из теоремы 1.10: если $T_s[A]$ и $T_s(M)$ изоморфны как векторные пространства, то из-за конечномерности $T_s(M)$ они изоморфны и как стереотипные пространства, значит их сопряженные пространства $T_s^*[A]$ и $T_s^*(M)$ также изоморфны (как стереотипные пространства и как векторные пространства). И наоборот.

С другой стороны, из условия (iv) следует условие (iii), потому что при изоморфизме

$$J_s^1[A] \cong J_s^1(M)$$

идеал $I_s[A] \cap J_s^1[A]$ переходит в идеал $I_s(M) \cap J_s^1(M)$, а это как раз означает изоморфизм

$$\begin{aligned} T_s^*[A] &= \left(I_s[A] / \overline{I_s^2[A]} \right)^\nabla = I_s[A] / \overline{I_s^2[A]} = I_s[A] \cap J_s^1[A] \cong I_s(M) \cap J_s^1(M) = \\ &= I_s(M) / \overline{I_s^2(M)} = \left(I_s(M) / \overline{I_s^2(M)} \right)^\nabla = T_s^*(M) \end{aligned}$$

Таким образом в эквивалентностях (ii) \iff (iii) \iff (iv) неочевидным звеном остается только импликация (iii) \implies (iv). Докажем ее. Пусть выполняется (iii). Тогда, прежде всего, выполняется равенство (2.17), которое применительно к данному случаю можно записать так:

$$\overline{I_s^2[A]} = A \cap I_s^2(M) \quad (2.19)$$

Далее, поскольку пространство $T_s^*[A] = \left(I_s[A] / \overline{I_s^2[A]} \right)^\nabla$ конечномерно, оно совпадает с пространством $I_s[A] / \overline{I_s^2[A]}$, которое также конечномерно, и поэтому у него можно выбрать конечный базис. То есть должна существовать конечная последовательность векторов $e_1, \dots, e_m \in I_s[A]$, для которых классы эквивалентности $e_1 + \overline{I_s^2[A]}, \dots, e_m + \overline{I_s^2[A]}$ образуют базис в $I_s[A] / \overline{I_s^2[A]}$. Для всякого мультииндекса $k \in \mathbb{N}^m$ обозначим

$$e^k = e_1^{k_1} \cdot \dots \cdot e_m^{k_m}$$

и пусть для любой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ и любого номера $n \in \mathbb{N}$ символ $E_s^n[f]$ обозначает линейную комбинацию функций e^k , $|k| \leq n$,

$$E_s^n[f] = \sum_{|k| \leq n} \lambda_k \cdot e^k.$$

имеющую в точке s ту же струю порядка n , что и функция f :

$$f \overset{I_s^{n+1}(M)}{\equiv} E_s^n[f] \quad (2.20)$$

(такая функция существует и единственна, потому что функции e_1, \dots, e_m образуют локальную карту в точке s , которая диффеоморфно отображает некоторую окрестность точки s на некоторую окрестность нуля в \mathbb{R}^m , и при этом диффеоморфизме функции $E_s^n[f]$ превращаются в точности в многочлены Тейлора функции f в точке 0).

Заметим, что операция $f \mapsto E_s^n[f]$ мультипликативна

$$E_s^n[f \cdot g] = E_s^n[f] \cdot E_s^n[g], \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad (2.21)$$

обладает вариантом свойства идемпотентности

$$E_s^q[E_s^p[f]] = E_s^p[f] = E_s^p[E_s^q[f]], \quad p \leq q \in \mathbb{N}, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M), \quad (2.22)$$

и непрерывна в A :

$$a_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty}^A a \implies E_s^n[a_i] \xrightarrow{i \rightarrow \infty}^A E_s^n[a]. \quad (2.23)$$

Первые два свойства следуют из представления $E_s^n[f]$ в виде многочленов Тейлора при диффеоморфизме, образованном локальной картой e_1, \dots, e_m , а второе – из конечномерности алгебры многочленов с фиксированной степенью: если $a_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty}^A a$, то $a_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty}^{\mathcal{C}^\infty(M)} a$, поэтому $E_s^n[a_i] \xrightarrow{i \rightarrow \infty}^{\mathcal{C}^\infty(M)} E_s^n[a]$, и поскольку левая и правая часть принадлежит конечномерному пространству $P = \text{span}\{e^k; |k| \leq n\}$, сходимость в $\mathcal{C}^\infty(M)$ здесь можно заменить сходимостью в P , а затем и сходимостью в A .

Докажем теперь формулу

$$a \overset{\overline{I_s^{n+1}[A]}}{\equiv} E_s^n[a], \quad a \in \overline{I_s}[A]. \quad (2.24)$$

Это делается по индукции. Прежде всего, эта формула верна для $n = 0$,

$$a \overset{I_s[A]}{\equiv} E_s^0[a], \quad a \in A, \quad (2.25)$$

потому что

$$a - E_s^0[a] = a - a(s) \cdot 1 \in I_s[A].$$

И при $n = 1$,

$$a \overset{\overline{I_s^2[A]}}{\equiv} E_s^1[a], \quad a \in \overline{I_s}[A], \quad (2.26)$$

потому что из (2.20) мы получаем $a - E_s^1[a] \in I_s^2(M)$, а с другой стороны, $a - E_s^1[a] \in A$, и вместе это означает, что $a - E_s^1[a] \in A \cap I_s^2(M) = (2.19) = \overline{I_s^2[A]}$.

Предположим далее, что формула (2.24) верна для какого-то числа $n - 1$:

$$a \overset{\overline{I_s^n[A]}}{\equiv} E_s^{n-1}[a], \quad a \in \overline{I_s^{n-1}}[A]. \quad (2.27)$$

Пусть $a \in \overline{I_s^n}[A]$. Это означает, что найдется некая направленность $a_i \in I_s^n[A]$, стремящаяся к a в A :

$$a_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty}^A a.$$

Каждый элемент a_i лежит в $I_s^n[A]$, поэтому представим в виде

$$a_i = \sum_{j=1}^p b_i^j \cdot c_i^j, \quad b_i^j \in I_s^{n-1}[A], \quad c_i^j \in I_s[A].$$

Из (2.27) и (2.26) мы получаем цепочку:

$$\begin{aligned} b_i^j \overset{\overline{I_s^n[A]}}{\equiv} E_s^{n-1}[b_i^j], \quad c_i^j \overset{\overline{I_s^2[A]}}{\equiv} E_s^1[c_i^j], \\ \Downarrow \\ b_i^j \cdot c_i^j \overset{\overline{I_s^{n+1}[A]}}{\equiv} E_s^{n-1}[b_i^j] \cdot E_s^1[c_i^j] = E_s^n[b_i^j \cdot c_i^j], \\ \Downarrow \\ a \overset{A}{\xleftarrow{\infty \leftarrow i}} a_i = \sum_{j=1}^p b_i^j \cdot c_i^j \overset{\overline{I_s^{n+1}[A]}}{\equiv} \sum_{j=1}^p E_s^n[b_i^j \cdot c_i^j] = E_s^n[a_i] \overset{(2.23)}{\xrightarrow{i \rightarrow \infty}^A} E_s^n[a], \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$a \stackrel{\overline{I_s^{n+1}}[A]}{\equiv} E_s^n[a].$$

После того, как формула (2.24) доказана, в ней можно заменить $a \in \overline{I_s^{n-1}}[A]$ на $a \in A$:

$$a \stackrel{\overline{I_s^{n+1}}[A]}{\equiv} E_s^n[a], \quad a \in A. \quad (2.28)$$

Действительно, при $n = 0$ это превращается уже отмечавшуюся формулу (2.25). Далее, если (2.28) доказана для какого-то $n - 1$,

$$a \stackrel{\overline{I_s^n}[A]}{\equiv} E_s^{n-1}[a], \quad a \in A,$$

то, записав это в виде

$$a - E_s^{n-1}[a] \in \overline{I_s^n}[A],$$

мы в силу (2.24) получим:

$$a - E_s^{n-1}[a] \stackrel{\overline{I_s^{n+1}}[A]}{\equiv} E_s^n[a - E_s^{n-1}[a]] = (2.22) = E_s^n[a] - E_s^{n-1}[a],$$

откуда

$$a \stackrel{\overline{I_s^{n+1}}[A]}{\equiv} E_s^n[a].$$

Наконец, из формулы (2.28) следует, что фактор-отображение $a \mapsto a + \overline{I_s^{n+1}}[A]$ пропускается через отображение $a \mapsto E_s^n[a]$, и поэтому фактор-алгебра $J_s^n[A]$ изоморфна образу $E_s^n[A]$ отображения $a \mapsto E_s^n[a]$:

$$J_s^n[A] \cong E_s^n[A].$$

С другой стороны, алгебра струй $J_s^n(M)$ на многообразии M также изоморфна $E_s^n[A]$:

$$J_s^n(M) \cong E_s^n[A].$$

Вместе то и другое означает выполнение условия (iv).

2. Из теоремы Нахбина 1.15 следует, что при выполнении (i) и (ii) естественное вложение $\rho : A \rightarrow C^\infty(M)$ становится плотным эпиморфизмом. Покажем, что оно также будет расширением относительно класса алгебр многочленов с коэффициентами в C^* -алгебрах. Пусть B — C^* -алгебра и $\varphi : A \rightarrow B[[m]]$ — дифференциальный морфизм стереотипных алгебр, то есть такой, для которого соответствующая система частных производных $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ состоит из дифференциальных операторов $D_k : A \rightarrow B$. Существование дифференциального гомоморфизма φ' , замыкающего диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & C^\infty(M) \\ \varphi \searrow & & \swarrow \varphi' \\ & B[[m]] & \end{array}$$

эквивалентно существованию системы дифференциальных частных производных $\{D'_k; k \in \mathbb{N}^m\}$, продолжающих операторы D_k с A на $C^\infty(M)$ и принимающих значения в B :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & C^\infty(M) \\ D_k \searrow & & \swarrow D'_k \\ & B & \end{array}$$

Обозначим

$$C = \overline{D_0(A)}, \quad F = Z^1(D_0) = \{b \in B : \forall a \in A \quad [b, D_0(a)] = 0\} = C^I.$$

По теореме 2.2, все операторы $\{D_k; k \in \mathbb{N}^m\}$ принимают значения в алгебре F . Поэтому нам достаточно доказать существование системы дифференциальных частных производных $\{D'_k; k \in \mathbb{N}^m\}$, продолжающих операторы D_k с A на $C^\infty(M)$ и принимающих значения в F :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & C^\infty(M) \\ D_k \searrow & & \swarrow D'_k \\ & F & \end{array} \quad (2.29)$$

Действительно, всякому дифференциальному оператору D_k по теореме 1.6 соответствует некий морфизм расслоений струй $j_n[D_k] : J_A^n[A] \rightarrow J_A^0(F) = \pi_A^0 F$, где $n = |k|$, удовлетворяющий тождеству

$$j^0(D_k a) = j_n[D_k] \circ j^n(a), \quad a \in A.$$

По условию (iv), расслоения $J_A^n[A]$ и $J^n(M)$ изоморфны, поэтому $j_n[D_k]$ можно считать морфизмом расслоений струй $j_n[D_k] : J_{\mathcal{E}(M)}^n[\mathcal{E}(M)] = J^n(M) \rightarrow J_A^0(F) = \pi_A^0 F$. По теореме 1.7 ему соответствует единственный дифференциальный оператор $D'_k : \mathcal{E}(M) \rightarrow F$ (над алгеброй A), удовлетворяющий тождеству

$$j^0(D'_k u) = j_n[D_k] \circ j^n(u), \quad u \in \mathcal{E}(M).$$

Для всякого $a \in A$ мы получим

$$j^0(D'_k \rho(a)) = j_n[D_k] \circ j^n(\rho(a)) = j_n[D_k] \circ j^n(a) = j^0(D_k a). \quad (2.30)$$

Заметим далее, что по теореме 1.4, отображение $j^0 = v : F \rightarrow \text{Sec}(\pi_A^0 F) = \text{Sec}(J_A^0 F)$, переводящее F в алгебру непрерывных сечений расслоения значений $\pi_A^0 F : J_A^0 F \rightarrow \text{Spec}(A)$ над алгеброй A , является изоморфизмом C^* -алгебр:

$$F \cong \text{Sec}(\pi_A^0 F).$$

Поэтому к (2.30) можно применить оператор, обратный j^0 , и мы получим равенство

$$D'_k \rho(a) = D_k a.$$

То есть D'_k продолжает D_k в диаграмме (2.29). Кроме того, из того, что ρ отображает A плотно в $C^\infty(M)$ следует, во-первых, что D'_k является дифференциальным оператором не только над A , но и над $C^\infty(M)$. И, во-вторых, что условия (2.6)-(2.8) переносятся с операторов D_k на операторы D'_k . Поэтому семейство $\{D_k, k \in \mathbb{N}^m\}$ представляет собой систему частных производных на $C^\infty(M)$.

3. Теперь убедимся, что при выполнении (i) и (ii) расширение $\rho : A \rightarrow C^\infty(M)$ является оболочкой. Пусть $\sigma : A \rightarrow B$ – какое-то другое C^∞ -расширение. Зафиксируем открытое множество $U \subseteq M$, диффеоморфное открытому множеству в \mathbb{R}^m , и пусть $K \subset U$ – какой-нибудь компакт, совпадающий с замыканием своей внутренности: $\text{Int}(K) = K$. Рассмотрим пространство $\mathcal{C}(K)$ непрерывных функций на K и обозначим через $D_k : A \rightarrow \mathcal{C}(K)$, $k \in \mathbb{N}^m$, систему частных производных, соответствующих ограничениям на K стандартных дифференциальных операторов на U , порожденных разделением переменных при диффеоморфизме U на открытое множество в \mathbb{R}^m . Пусть $D : A \rightarrow \mathcal{C}(K)[[m]]$ – дифференциальный гомоморфизм, соответствующий системе операторов $\{D_k\}$. Поскольку $\sigma : A \rightarrow B$ есть C^∞ -расширение, гомоморфизм $D : A \rightarrow \mathcal{C}(K)[[m]]$ должен однозначно продолжаться до некоторого гомоморфизма $D' : C \rightarrow \mathcal{C}(K)[[m]]$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ & \searrow D & \swarrow D' \\ & \mathcal{C}(K)[[m]] & \end{array} \quad (2.31)$$

Вернувшись назад к системе частных производных D_k , мы получим для всякого индекса $k \in \mathbb{N}^m$ диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ & \searrow D_k & \swarrow D'_k \\ & \mathcal{C}(K) & \end{array}$$

Зафиксируем какой-нибудь элемент $b \in B$. Поскольку $\sigma : A \rightarrow B$ – плотный эпиморфизм, найдется направленность элементов $a_i \in A$ такая, что

$$\sigma(a_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} b.$$

Для всякого индекса $k \in \mathbb{N}^m$ мы получим

$$D_k(a_i) = D'_k(\sigma(a_i)) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} D'_k(b). \quad (2.32)$$

Теперь рассмотрим какую-нибудь гладкую кривую в K , точнее, гладкое отображение $\gamma : [0, 1] \rightarrow K$. Пусть для всякого индекса $k \in \mathbb{N}^m$ порядка $|k| = 1$ и любой точки $t \in [0, 1]$ символ $\gamma^k(t)$ обозначает k -ю

компоненту производной $\gamma'(t)$ в разложении по локальным координатам на U . Для всякой функции $a \in A$ мы по теореме Ньютона-Лейбница получим

$$D_0(a)(\gamma(1)) - D_0(a)(\gamma(0)) = \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D_k(a)(\gamma(t)) dt.$$

Вместе с (2.32) это дает

$$\begin{aligned} D'_0(b)(\gamma(1)) - D'_0(b)(\gamma(0)) &\xleftarrow{\infty \leftarrow i} D_0(a_i)(\gamma(1)) - D_0(a_i)(\gamma(0)) = \\ &= \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D_k(a_i)(\gamma(t)) dt \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D_k(b)(\gamma(t)) dt \end{aligned}$$

и значит

$$D'_0(b)(\gamma(1)) - D'_0(b)(\gamma(0)) = \sum_{|k|=1} \int_0^1 \gamma^k(t) \cdot D_k(b)(\gamma(t)) dt$$

Эта связь между функцией $D'_0(b) \in \mathcal{C}(K)$ и функциями $D'_k(b) \in \mathcal{C}(K)$, $|k| = 1$, означает, что $D'_0(b)$ непрерывно дифференцируема на K , причем ее частными производными в выбранных нами локальных координатах будут функции $D'_k(b)$, $|k| = 1$.

Выбрав после этого какую-нибудь из производных $D'_k(b)$, $|k| = 1$, и рассмотрев индексы порядка 2, мы точно тем же приемом получим, что $D'_k(b)$ также непрерывно дифференцируема. И вообще, организовав индукцию по индексам, мы сможем показать, что все функции $D'_k(b)$ бесконечно дифференцируемы, и связаны между собой как частные производные функции $D'_0(b)$ (относительно выбранных нами локальных координат).

Если теперь менять компакт $K \subset U$ и открытое множество $U \subseteq M$, то возникающие при этом гладкие функции $D'_0(b)$ на K будут согласованы между собой тем, что на пересечении своих областей определения они совпадают. Поэтому определена некая общая гладкая функция $\rho'(b) : M \rightarrow \mathbb{C}$, обладающая тем свойством, что ее ограничение на каждый компакт K будет совпадать с соответствующей функцией $D'_0(b)$:

$$\rho'(b)|_K = D'_0(b), \quad K \subset U \subseteq M.$$

а частные производные при выбранной системе локальных координат совпадают с действием операторов D'_k на b . Иными словами, определено некое отображение $\rho' : B \rightarrow C^\infty(M)$ (по построению это будет гомоморфизм алгебр), для которого будет коммутативна следующая диаграмма, уточняющая (2.31):

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ \rho \searrow & & \nearrow \rho' \\ & C^\infty(M) & \\ D \swarrow & \downarrow \iota & \searrow D' \\ & \mathcal{C}(K)[[m]] & \end{array} \quad (2.33)$$

(здесь отображение ι есть разложение гладкой функции в ряд по частным производным на компакте $K \subset U \subseteq M$ при выбранных локальных координатах на U). Из этой диаграммы следует, что ρ' должно быть непрерывно, потому что если $b_i \rightarrow b$, то это условие сохраняется под действием каждого оператора D'_k , то есть $D'_k(b_i) \rightarrow D'_k(b)$, а это как раз и есть сходимости в пространстве $C^\infty(M)$.

Верхний внутренний треугольник в (2.33) будет как раз той диаграммой, которая нам нужна для того, чтобы убедиться, что расширение ρ является оболочкой. \square

Ниже нам понадобится

Лемма 2.2. Пусть x – функция из $C^\infty(\mathbb{R})$, у которой все производные (включая саму функцию x как свою производную нулевого порядка) равны нулю в точке 0 ,

$$\forall n \geq 0 \quad x^n(0) = 0.$$

Тогда ее можно приблизить в $C^\infty(\mathbb{R})$ функциями с нулевым ростком в точке 0 .

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, $T > 1$, $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad \sup_{|t| \leq \delta} |x^{(k)}(t)| \leq \varepsilon.$$

Выберем функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ со свойствами:

$$0 \leq \eta(s) \leq 1, \quad \eta(s) = \begin{cases} 0, & |s| \leq \frac{\delta}{2} \\ 1, & |s| \geq \delta \end{cases}$$

и положим

$$y_n(t) = \int_0^t \eta(s) \cdot x^{(n+1)}(s) \, ds, \quad y_{n-1}(t) = \int_0^t y_n(s) \, ds, \quad \dots, \quad y_0(t) = \int_0^t y_1(s) \, ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq T} |x^n(t) - y_n(t)| &= \sup_{|t| \leq T} \left| \int_0^t x^{(n+1)}(s) \, ds - \int_0^t \eta(s) \cdot x^{(n+1)}(s) \, ds \right| \leq \\ &\leq \sup_{|t| \leq T} \int_0^t (1 - \eta(s)) \cdot |x^n(s)| \, ds \leq \sup_{|s| \leq T} |x^n(s)| \cdot \int_0^t (1 - \eta(s)) \, ds \leq \sup_{|s| \leq T} |x^{(n+1)}(s)| \cdot \delta. \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq T} |x^{(n-1)}(t) - y_{n-1}(t)| &= \sup_{|t| \leq T} \left| \int_0^t x^n(s) \, ds - \int_0^t y_n(s) \, ds \right| \leq \\ &\leq \sup_{|t| \leq T} \int_0^t |x^n(s) - y_n(s)| \, ds \leq \sup_{|s| \leq T} |x^{(n+1)}(s)| \cdot \delta \cdot T. \end{aligned}$$

\Downarrow

\dots

\Downarrow

$$\begin{aligned} \sup_{|t| \leq T} |x^{(0)}(t) - y_0(t)| &= \sup_{|t| \leq T} \left| \int_0^t x^1(s) \, ds - \int_0^t y_1(s) \, ds \right| \leq \\ &\leq \sup_{|t| \leq T} \int_0^t |x^1(s) - y_1(s)| \, ds \leq \sup_{|s| \leq T} |x^{(n+1)}(s)| \cdot \delta \cdot T^n. \end{aligned}$$

Теперь видно, что при фиксированных $n \in \mathbb{N}$, $T > 1$, $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ можно подобрать так, чтобы

$$\delta < \frac{\varepsilon}{T^n \cdot \sup_{|s| \leq T} |x^{(n+1)}(s)|},$$

и тогда построенная функция y_0 будет отличаться от x меньше, чем на ε равномерно по производным порядка не больше n на отрезке $[-T, T]$:

$$\max_{0 \leq k \leq n} \sup_{|t| \leq T} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)| = \max_{0 \leq k \leq n} \sup_{|t| \leq T} |x^{(k)}(t) - y_k(t)| \leq T^n \cdot \sup_{|s| \leq T} |x^{(n+1)}(s)| < \varepsilon.$$

□

Следующие два примера показывают независимость друг от друга условий (i) и (ii) в теореме 2.3.

Пример 2.2. Существует замкнутая подалгебра A в алгебре $C^\infty(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

(i) спектр A не совпадает с \mathbb{R} ,

$$\text{Spec}(A) \neq \mathbb{R},$$

(ii) для всякой точки $s \in \mathbb{R}$ естественное отображение касательных пространств

$$T_s[A] \leftarrow T_s(\mathbb{R})$$

является изоморфизмом (векторных пространств),

Доказательство. Такими свойствами обладает алгебра периодических гладких функций на \mathbb{R} с каким-нибудь фиксированным периодом, например, 1. \square

Пример 2.3. Существует замкнутая подалгебра A в алгебре $C^\infty(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

(i) спектр A совпадает с \mathbb{R} ,

$$\text{Спек}(A) = \mathbb{R},$$

(ii) в точке $s = 0$ касательное пространство к A вырождено:

$$T_0[A] = 0$$

Доказательство. Такими свойствами обладает алгебра гладких функций, имеющих в точке $s = 0$ нулевые производные любого положительного порядка:

$$A = \{x \in C^\infty(M) : \forall n \geq 1 \quad x^n(0) = 0\}.$$

1. Покажем сначала, что $\text{Спек}(A) = \mathbb{R}$. Пусть $s \in \text{Спек}(A)$, то есть s – инволютивный, непрерывный, линейный, мультипликативный и сохраняющий единицу функционал на A :

$$s(x^*) = \overline{s(x)}, \quad s(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot s(x) + s(y), \quad s(x \cdot y) = s(x) \cdot s(y), \quad s(1) = 1.$$

Рассмотрим его ядро $\text{Ker } s = \{x \in A : s(x) = 0\}$ и покажем, что найдется точка $t \in \mathbb{R}$ такая, что если ее рассматривать, как функционал на A , то его ядро содержит $\text{Ker}(s)$:

$$\text{Ker } s \subseteq \text{Ker } t = \{x \in A : x(t) = 0\}. \quad (2.34)$$

Предположим, что это не так, то есть

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists x_t \in \text{Ker } s \quad x_t(t) \neq 0. \quad (2.35)$$

Рассмотрим семейство множеств

$$U_t = \{r \in \mathbb{R} : x_t(r) \neq 0\}.$$

Они открыты в \mathbb{R} , а условие (2.35) означает, что они образуют покрытие прямой \mathbb{R} . Поэтому в это семейство можно вписать гладкое локально конечное разбиение единицы:

$$\eta_t \in C^\infty(M), \quad \text{supp } \eta_t \subseteq U_t, \quad \eta_t \geq 0, \quad \sum_{t \in \mathbb{R}} \eta_t = 1.$$

Это разбиение можно выбрать так, чтобы оно удовлетворяло следующим дополнительным условиям:

$$\forall n \geq 1 \quad \eta_0^n(0) = 0 \quad \& \quad \forall t \neq 0 \quad 0 \notin \text{supp } \eta_t.$$

Из них автоматически будет следовать, что все функции η_t лежат в A , а ряд $\sum_{t \in \mathbb{R}} \eta_t \cdot x_t \cdot x_t^*$ сходится в A (относительно топологии, индуцированной из $C^\infty(\mathbb{R})$). Обозначим его сумму буквой y ,

$$y = \sum_{t \in \mathbb{R}} \eta_t \cdot x_t \cdot x_t^*,$$

и заметим, что, поскольку все x_t лежат в замкнутом идеале $\text{Ker } s$, элемент y тоже должен лежать в нем:

$$y \in \text{Ker } s.$$

С другой стороны, функция y нигде не обращается в нуль. Действительно, для всякой точки $r \in \mathbb{R}$ найдется какая-то функция η_{t_r} , не равная нулю в этой точке, и поэтому $\eta_{t_r}(r) > 0$. При этом, из условия $\text{supp } \eta_{t_r} \subseteq U_{t_r} = \{q \in \mathbb{R} : x_{t_r}(q) \neq 0\}$ следует, что $|x_{t_r}(r)| > 0$, и мы получаем

$$y(r) = \sum_{t \in \mathbb{R}} \eta_t(r) \cdot |x_t(r)|^2 \geq \underbrace{\eta_{t_r}(r)}_{>0} \cdot \underbrace{|x_{t_r}(r)|^2}_{>0} > 0.$$

То есть y обратима, как элемент алгебры $C^\infty(\mathbb{R})$. Вдобавок, по построению, все производные функции y в точке 0 равны нулю, поэтому у ее обратной функции $\frac{1}{y}$ все производные в точке 0 тоже равны нулю. Значит,

$$\frac{1}{y} \in A.$$

То есть функция y обратима, как элемент алгебры A .

Итак, функция y с одной стороны лежит в идеале $\text{Ker } s$ алгебры A , а с другой – обратима в A . Значит, $\text{Ker } s = A$, а это противоречит условию $s(1) = 1$. То есть наше предположение (2.35) оказалось неверно. Таким образом, для некоторого $t \in \mathbb{R}$ должно выполняться (2.34). Мы получаем, что на A заданы два ненулевых линейных функционала, s и t , причем, во-первых, ядро s содержится в ядре t , и, во-вторых, на элементе $1 \in A$ их значения совпадают: $s(1) = t(1) = 1$. Такое возможно только если они совпадают всюду на A : $s = t$.

2. Теперь докажем условие (ii). Для этого покажем, что у характера $x \mapsto x(0)$ ядро $I_0[A] = \{x \in A : x(0) = 0\}$ обладает следующим свойством:

$$\overline{I_0^2[A]} = I_0[A]. \quad (2.36)$$

– тогда из формулы (1.91) будет следовать

$$T_0[A] = \text{Re} (I_0[A] / \overline{I_0^2[A]})^\vee = 0.$$

Действительно, пусть $x \in I_0[A]$, то есть x – функция из $C^\infty(\mathbb{R})$, у которой не только производные, но и значение в точке 0 равно нулю,

$$\forall n \geq 0 \quad x^n(0) = 0.$$

По лемме 2.2 ее можно приблизить в $C^\infty(\mathbb{R})$ функциями с нулевым ростком в точке 0. С другой стороны, всякую функцию y с нулевым ростком в точке 0 можно представить как элемент идеала $I_0^2[A]$ – для этого ее достаточно просто домножить на другую функцию с нулевым ростком в 0, но равную 1 на носителе y . Мы получаем, что x приближается в $C^\infty(\mathbb{R})$ (а значит и в A) функциями из $I_0^2[A]$. \square

Замечания по поводу терминологии. В теореме 2.3 условия (i)-(iv) можно сделать необходимыми при дополнительных предположениях о спектре алгебры A или при замене определения C^∞ -оболочки на несколько более жесткое.

Замечание 2.1. Если дополнительно известно, что спектр алгебры A является k -пространством, то условие (i) теоремы 2.3 становится необходимым для того, чтобы вложение $A \subseteq C^\infty(M)$ было C^∞ -оболочкой.

Доказательство. Пусть вложение $\rho : A \rightarrow C^\infty(M)$ является C^∞ -расширением. Тогда, в частности, ρ будет расширением в DEP относительно класса алгебр многочленов нулевой степени в коэффициентами в C^* -алгебрах. То есть ρ будет расширением в DEP относительно класса C^* -алгебр. Тогда по [3, Лемма 4.11] сопряженное отображение спектров $\text{Spec}(A) \leftarrow \text{Spec}(C^\infty(M)) = M$ является гомеоморфизмом топологических пространств. \square

- Пусть B – C^* -алгебра и $m, n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $I_{m,n}$ замкнутый идеал в алгебре $B[[m]]$ степенных рядов с коэффициентами в B , состоящий из рядов, у которых коэффициенты с индексами $|k| \leq n$ обнуляются:

$$I_{m,n} = \{x \in B[[m]] : \forall k \in \mathbb{N}^m \quad |k| \leq n \implies x_k = 0\}.$$

Фактор-алгебра

$$B[m, n] := B[[m]] / I_{m,n}$$

называется *алгеброй многочленов степени n от m переменных с коэффициентами в алгебре B* .

Если обозначить как-нибудь множество мультииндексов, не превосходящих по модулю числа n , например,

$$\Sigma[m, n] = \{k \in \mathbb{N}^m : |k| \leq n\},$$

то алгебру многочленов $B[m, n]$ можно представлять себе как пространство всевозможных семейств $x = \{x_k; k \in \Sigma[m, n]\}$ элементов из B , индексированных мультииндексами $k \in \Sigma[m, n]$. Инволюция, сумма, умножение на скаляр и произведение в $B[m, n]$ определяются формулами

$$(x^*)_k = (x_k)^*, \quad x \in B[m, n], \quad k \in \Sigma[m, n] \quad (2.37)$$

$$(x + y)_k = x_k + y_k, \quad x, y \in B[m, n], \quad k \in \Sigma[m, n] \quad (2.38)$$

$$(\lambda \cdot x)_k = \lambda \cdot x_k, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in B[m, n], \quad k \in \Sigma[m, n] \quad (2.39)$$

$$(x \cdot y)_k = \sum_{0 \leq l \leq k} x_{k-l} \cdot y_l, \quad x, y \in B[m, n], \quad k \in \Sigma[m, n] \quad (2.40)$$

Единицей в $B[[m]]$ будет, как легко понять, семейство

$$1_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

Элементы $B[m, n]$ удобно представлять себе как многочлены степени n от m независимых переменных τ_1, \dots, τ_m :

$$x = \sum_{k \in \Sigma[m, n]} x_k \cdot \tau^k,$$

где под τ^k понимается формальное произведение

$$\tau^k = \tau^{k_1} \cdot \dots \cdot \tau^{k_m},$$

причем считается, что

$$\tau^k \cdot \tau^l = \begin{cases} \tau^{k+l}, & k+l \in \Sigma[m, n] \\ 0, & k+l \notin \Sigma[m, n] \end{cases}.$$

Тогда сумма, умножение на скаляр и произведение в $B[m, n]$ описываются обычными формулами для многочленов:

$$x + y = \sum_{k \in \Sigma[m, n]} (x_k + y_k) \cdot \tau^k, \quad \lambda \cdot x = \sum_{k \in \Sigma[m, n]} (\lambda \cdot x_k) \cdot \tau^k, \quad x \cdot y = \sum_{k \in \Sigma[m, n]} \left(\sum_{0 \leq l \leq k} x_{k-l} \cdot y_l \right) \cdot \tau^k.$$

Замечание 2.2. Пусть под C^∞ -оболочкой стереотипной алгебры A понимается оболочка в классе \mathbf{DEpi} плотных эпиморфизмов категории \mathbf{Ste}^\otimes стереотипных алгебр относительно класса алгебр многочленов с коэффициентами в C^* -алгебрах, то есть относительно алгебр вида $B[[m, n]]$, где B – C^* -алгебра, а $m, n \in \mathbb{N}$ – натуральные числа. Тогда условия (ii)–(iv) теоремы 2.3 становятся необходимыми для того, чтобы вложение $A \subseteq C^\infty(M)$ было C^∞ -оболочкой.

Доказательство. Пусть вложение $\rho : A \rightarrow C^\infty(M)$ является расширением в классе \mathbf{DEpi} плотных эпиморфизмов относительно класса алгебр многочленов с коэффициентами в C^* -алгебрах. Рассмотрим алгебру $\mathbb{C}[1, 1]$ многочленов степени 1 от одной переменной. Как векторное пространство она изоморфна прямой сумме $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, а морфизмы $A \rightarrow \mathbb{C}[1, 1]$ представляют собой пары (s, τ) , где $s \in \mathbf{Spec}(A)$ – точка спектра, а $\tau \in T_s[A]$ – касательный вектор в этой точке. Для точки $t \in \mathbf{Spec}(B)$, о которой речь идет в формулировке, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & B \\ & \searrow (t \circ \rho, \sigma \circ \rho) & \swarrow (t, \sigma) \\ & \mathbb{C}[1, 1] & \end{array}$$

Поскольку $\rho : A \rightarrow B$ есть C^∞ -расширение, всякой стрелке $A \rightarrow \mathbb{C}[1, 1]$ соответствует единственная стрелка $B \rightarrow \mathbb{C}[1, 1]$, и это означает, что отображение касательных пространств $\sigma \mapsto \rho^*(\sigma) = \sigma \circ \rho$ является биекцией. Поскольку либо $T_t(B) < \infty$, либо $T_{t \circ \rho}(A) < \infty$, это означает, что отображение ρ^* является изоморфизмом стереотипных пространств. \square

Преобразование Фурье на коммутативной группе Ли. Пусть G – компактно порожденная коммутативная группа Ли, $\mathcal{E}(G)$ – алгебра гладких функций на G , $\mathcal{E}^*(G)$ – ее сопряженное пространство, рассматриваемое как стереотипная алгебра с умножением, порожденным операцией умножения на G (подробности см. напр. в [1]), G^\bullet – двойственная группа, состоящая из характеров на G , то есть непрерывных гомоморфизмов $\chi : G \rightarrow \mathbb{T}$ в окружность \mathbb{T} (G^\bullet наделяется поточечным умножением и топологией равномерной сходимости на компактах в G), $\mathcal{F}_G : \mathcal{E}^*(G) \rightarrow \mathcal{E}(G^\bullet)$ – преобразование Фурье на G , то есть

гомоморфизм алгебр, действующий по формуле

$$\begin{array}{c}
 \text{значение функции } \mathcal{F}_G(\alpha) \in \mathcal{E}(G^\bullet) \\
 \text{в точке } \chi \in G^\bullet \\
 \downarrow \\
 \overbrace{\mathcal{F}_G(\alpha)(\chi)} = \underbrace{\alpha(\chi)} \quad (\chi \in G^\bullet, \quad \alpha \in \mathcal{E}^*(G)) \\
 \uparrow \\
 \text{действие функционала } \alpha \in \mathcal{E}^*(G) \\
 \text{на функцию } \chi \in G^\bullet \subseteq \mathcal{E}(G)
 \end{array}$$

Теорема 2.4. Для всякой компактно порожденной коммутативной группы Ли G ее преобразование Фурье $\mathcal{F}_G : \mathcal{E}^*(G) \rightarrow \mathcal{E}(G^\bullet)$ является C^∞ -оболочкой алгебры $\mathcal{E}^*(G)$:

$$\mathcal{F}_G = \text{env}_{C^\infty} \mathcal{E}^*(G).$$

Доказательство. Здесь надо просто проверить условия (i) и (ii) теоремы 2.3. Пусть $\delta : G \rightarrow \mathcal{E}^*(G)$ – вложение группы G в групповую алгебру $\mathcal{E}^*(G)$ в виде дельта-функций:

$$\delta_a(u) = u(a), \quad u \in \mathcal{E}(G).$$

Тогда, во-первых, в силу [1, Theorem 10.12], формула

$$\chi = \varphi \circ \delta$$

задает биекцию между характерами $\varphi : \mathcal{E}^*(G) \rightarrow \mathbb{C}$ на алгебре $\mathcal{E}^*(G)$ и комплексными характерами $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ на группе G . При этом инволютивным характерам $\varphi : \mathcal{E}^*(G) \rightarrow \mathbb{C}$ будут соответствовать обычные характеры $\chi : G \rightarrow \mathbb{T}$ (со значениями в окружности \mathbb{T}). Это соответствие $\varphi \leftrightarrow \chi$ непрерывно в обе стороны, поэтому задает изоморфизм

$$\text{Spec}(\mathcal{E}^*(G)) \cong G^\bullet.$$

Это условие (i) теоремы 2.3.

Во-вторых, пусть $\tau : \mathcal{E}^*(G) \rightarrow \mathbb{C}$ – касательный вектор в точке спектра $\varepsilon \in \text{Spec}(\mathcal{E}^*(G))$, соответствующей единичному характеру $1(a) = 1$, $a \in G$. Тожество Лейбница (1.83) для него принимает вид

$$\tau(\alpha * \beta) = \tau(\alpha) \cdot \varepsilon(\beta) + \varepsilon(\alpha) \cdot \tau(\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathcal{E}^*(G),$$

и если заменить α на δ_a , а β на δ_b , то мы получаем

$$\tau(\delta_{a \cdot b}) = \tau(\delta_a * \delta_b) = \tau(\delta_a) \cdot \varepsilon(\delta_b) + \varepsilon(\delta_a) \cdot \tau(\delta_b) = \tau(\delta_a) + \tau(\delta_b), \quad a, b \in G.$$

Это значит, что отображение $a \mapsto \tau(\delta_a)$ является гомоморфизмом из G в аддитивную группу \mathbb{C} . Если вдобавок потребовать, чтобы τ был инволютивным касательным вектором, то числа $\tau(\delta_a)$ станут вещественными, поэтому отображение $a \mapsto \tau(\delta_a)$ превратится в (непрерывный) гомоморфизм групп $G \rightarrow \mathbb{R}$, то есть станет вещественным характером. Это устанавливает биекцию между касательным пространством $T_\varepsilon(\mathcal{E}^*(G))$ к алгебре $\mathcal{E}^*(G)$ и группой $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$ вещественных характеров на G . Но $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$ изоморфна группе однопараметрических подгрупп в G^\bullet , то есть группе $\text{Hom}(\mathbb{R}, G^\bullet)$ (непрерывных) гомоморфизмов $\mathbb{R} \rightarrow G^\bullet$ (см. напр. [10, (24.42)]). Как следствие, $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$ изоморфна касательному пространству к группе G^\bullet в точке $1 \in G^\bullet$, и мы получаем цепочку изоморфизмов

$$T_\varepsilon(\mathcal{E}^*(G)) \cong \text{Hom}(G, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(\mathbb{R}, G^\bullet) \cong T_1(G^\bullet).$$

Если опустить промежуточные равенства, то точку 1 можно заменить на любую другую точку $\chi \in G^\bullet$, поэтому мы получаем изоморфизм

$$T_\chi(\mathcal{E}^*(G)) \cong T_\chi(G^\bullet) \cong T_\chi(\mathcal{E}(G^\bullet)).$$

Это как раз условие (ii) теоремы 2.3. □

Литература

- [1] S. S. Akbarov. Pontryagin duality in the theory of topological vector spaces and in topological algebra. *Journal of Mathematical Sciences*. 113(2): 179-349, 2003.
- [2] С. С. Акбаров, Голоморфные функции экспоненциального типа и двойственность для групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы, *Фундаментальная и прикладная математика* 2008, 14(1): 3-178. English translation: S. S. Akbarov. Holomorphic functions of exponential type and duality for Stein groups with algebraic connected component of identity, *Journal of Mathematical Sciences*, 162(4): 459-586, 2009; <http://arxiv.org/abs/0806.3205>.
- [3] С.С.Акбаров. Оболочки и отпечатки в категориях. <http://arxiv.org/abs/1110.2013>
- [4] T. Becker, A few remarks on the Dauns-Hofmann theorems for C^* -algebras, *Arch. Math.* 43: 265-269, 1984.
- [5] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
- [6] A. Connes, Non-commutative geometry, Boston, MA: Academic Press, 1994.
- [7] Ж.Диксмье. C^* -алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
- [8] Р. Энгелькинг. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [9] G. Gierz, Bundles of topological vector spaces and their duality, Springer, 1982.
- [10] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т.1. М.: Наука, 1975.
- [11] M. J. Dupré, R. M. Gillette, Banach bundles, Banach modules and automorphisms of C^* -algebras. Research notes in mathematics, 92, Boston 1983.
- [12] J. M. G. Fell, An extension of Mackey's method to Banach $*$ -algebraic bundles, *Mem. A.M.S.* 90, 1969.
- [13] M. Fragoulopoulou. Spaces of representations and enveloping l.m.c. $*$ -algebras. *Pacific J. Math.* 95(1): 61-73, 1981.
- [14] A. Inoue. Locally C^* -algebra. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, 25(2): 197-235, 1971.
- [15] J. Kuznetsova, A duality for Moore groups. *J. Oper. Theory*, to appear; <http://arxiv.org/abs/0907.1409>.
- [16] J. G. Llavona. Approximation of continuously differentiable functions, North Holland, 1986.
- [17] Дж.Мёрфи, C^* -алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
- [18] L. Nachbin. Sur les algèbres denses de fonctions différentiables sur une variété, *C.R. Acad. Sci. Paris* 228 (1949) 1549-1551.
- [19] А. Ю. Пирковский. "Оболочки Аренса-Майкла, гомологические эпиморфизмы и относительно квази-свободные алгебры," *Труды ММО*, 69: 34-123, 2008.
- [20] N. C. Phillips. Inverse limits of C^* -algebras. *J. Oper. Theory* 19: 159-195, 1988.
- [21] J. Varela, Duality of C^* -algebras, in "Recent Advances in the Representation Theory of Rings and C^* -algebras by Continuous Sections", *Mem. A.M.S.* 148:97-108, 1974.

Оглавление

§ 0	Введение	2
(a)	Терминология, обозначения и предварительные результаты.	3
	Инволюция на стереотипном пространстве.	3
	Обозначение $M \cdot N$	6
	Инволютивный спектр.	6
§ 1	Локально выпуклые расслоения и дифференциально-геометрические конструкции	8
(a)	Локально выпуклые расслоения	8
	Непрерывные сечения локально выпуклого расслоения.	10
	Задание локально выпуклого расслоения системами сечений и полунорм.	12
	Морфизмы расслоений.	18
	Двойственное расслоение.	19
(b)	Расслоение значений и морфизмы модулей	20
	Расслоение значений модуля над коммутативной инволютивной алгеброй.	20
	Морфизмы модулей и их связь с морфизмами расслоений.	23
	Морфизмы со значениями в C^* -алгебре и теорема Даунса-Хофманна.	24
(c)	Расслоение струй и дифференциальные операторы	26
	Расслоение струй.	26
	Дифференциальные операторы.	28
	Дифференциальные операторы на алгебрах.	31
	Дифференциальные операторы со значениями в C^* -алгебре.	33
(d)	Касательное и кокасательное расслоения	35
	Касательное и кокасательное пространства.	35
	Кокасательное расслоение $T^*[A]$	38
	Касательное расслоение $T[A]$	40
	Теорема Нахбина.	41
§ 2	C^∞ -алгебры и C^∞ -оболочки	41
(a)	Алгебры степенных рядов с коэффициентами в C^* -алгебрах	41
	Системы частных производных.	43
	Частные производные как дифференциальные операторы.	44
(b)	C^∞ -оболочки.	45
	C^∞ -оболочки.	45
	Замечания по поводу терминологии.	54
	Преобразование Фурье на коммутативной группе Ли.	55